

Elementy algebry i geometrii analitycznej
Przykładowy stary zestaw egzaminacyjny

1. Czy podana para stanowi grupę?

T **N** $(\mathbb{R}, +);$

T **N** $(\{-1, 1\}, +);$

T **N** $(\mathbb{Z}, \cdot);$

T **N** $(A_5, \cdot), A_5$ - zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 5;

2. Dane są permutacje $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

T **N** $\sigma = (1, 5)(1, 4)(1, 3)(2, 6);$

T **N** $\sigma\pi = \pi\sigma;$

T **N** π jest cyklem długości 5;

T **N** $\sigma = (2, 6)(1, 5, 4, 3);$

3. Niech $z = -5i, w = -10i.$

T **N** $\arg(z^4) = 0;$

T **N** $z \cdot \bar{w} = 50;$

T **N** $\arg z = \arg w;$

T **N** z jest pierwiastkiem równania $\operatorname{Re}(x) + \operatorname{Im}(x) + 5 = 0;$

4. Niech $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ będą dowolne.

T **N** jeżeli $A \cdot C = B \cdot C$, to $A = B;$

T **N** $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B);$

T **N** $\operatorname{rz} A \leq 2;$

T **N** $(2A^T + B^T)^T = 2(A + \frac{1}{2}B);$

5. Niech $A, B \in M_3(\mathbb{R}).$

T **N** jeżeli A, B są nieosobliwe, to $(A \cdot B)^T$ też jest nieosobliwa;

T **N** jeżeli B jest odwracalna, to $(B^2)^{-1}$ też jest odwracalna;

T **N** jeżeli A jest odwracalna, to $\det(A^T(3A^{-1})) = 3;$

T **N** jeżeli A i B są odwracalne, to $A + B$ jest odwracalna;

6. Czy prawdziwe są poniższe stwierdzenia dotyczące układów równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych?

- T** **N** układ jednorodny zawsze ma co najmniej jedno rozwiązanie;
- T** **N** rząd macierzy głównej jest równy liczbie równań układu;
- T** **N** układ, w którym liczba równań jest równa liczbie niewiadomych jest układem Cramera;
- T** **N** układ, w którym rząd macierzy głównej jest mniejszy od rzędu macierzy uzupełnionej jest sprzeczny;

7. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ rozważmy wektory $u = (2, 2, 2)$, $v = (0, -2, 0)$, $w = (2, 0, 2)$.

- T** **N** wektory u, v, w są liniowo zależne;
- T** **N** każdy wektor z $\mathbb{R}^3$ jest kombinacją liniową u, v, w ;
- T** **N** podprzestrzeń $\text{Lin}(u, v)$ jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbb{R}_2[x]$;
- T** **N** $w \in \text{Lin}(u, v)$;

8. Rozważmy przestrzeń wektorową $\mathbb{R}_4[x]$.

- T** **N** $\dim(\mathbb{R}_4[x]) = 5$;
- T** **N** podana przestrzeń jest izomorficzna z $M_{1 \times 5}(\mathbb{R})$;
- T** **N** podzbiór wielomianów parzystego stopnia w $\mathbb{R}_4[x]$ jest jej podprzestrzenią;
- T** **N** różne bazy tej przestrzeni nie muszą mieć tej samej liczby elementów ;

9. Niech $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (1, 0, 1)$, $U = \text{Lin}(u, v)$.

- T** **N** U jest izomorficzna z $\mathbb{R}^2$;
- T** **N** $(3, 1, 3) \in U$;
- T** **N** $\forall x \in U \quad x + w \in U$;
- T** **N** $\forall x, y \in U \quad x + y \in U$;

10. Dane jest odwzorowanie liniowe

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x], T(a, b, c) = cx^2 + bx.$$

- T** **N** $\text{Im}(T) = \mathbb{R}_2[x]$;
- T** **N** $\dim(\text{Ker } T) = 1$;
- T** **N** $\dim(\text{Im } T) = 2$
- T** **N** T jest izomorfizmem;