

# ELEMENTY ALGEBRY I GEOMETRII ANALITYCZNEJ

ANNA SZCZEPKOWSKA

## 1. MINI REPETYTORIUM Z LOGIKI I TEORII MNOGOŚCI

Celem wykładu jest ustalenie jednolitych oznaczeń z logiki i teorii mnogości oraz zapoznanie studentów z podstawowymi technikami dowodzenia twierdzeń matematycznych.

### 1.1. Zdanie w logice.

**Definicja 1.** *Zdaniem (w sensie logicznym) nazywamy stwierdzenie, któremu można (na gruncie pewnej wiedzy, teorii) przypisać w sposób jednoznaczny jedną z dwóch ocen: **prawda** lub **fałsz**.*

#### Przykład 1.

- (1) *4 jest liczbą pierwszą. Zdanie fałszywe.*
- (2) *2 jest równe 3. Zdanie fałszywe.*
- (3) *Niech  $x$  będzie liczbą całkowitą. Nie jest to zdanie.*
- (4) *Wszystkie liczby pierwsze są liczbami parzystymi. Zdanie fałszywe.*
- (5)  *$2^{400} + 1$  jest wielką liczbą. Nie jest to zdanie.*
- (6) *Liczby pierwsze istnieją. Zdanie prawdziwe.*
- (7) *Podstaw do wzoru liczbę naturalną i oblicz! Nie jest to zdanie.*
- (8) *To zdanie jest prawdziwe. Nie jest to zdanie.*
- (9) *Wszystkie kąty wewnętrzne trójkąta równobocznego mają miarę  $60^\circ$ . Zdanie prawdziwe.*

**1.2. Podstawowe operacje na zdaniach.** Zdania można łączyć w struktury bardziej złożone stosując tzw. **spójniki logiczne**, do których należą:

nie ( $\neg$ ), lub ( $\vee$ ), i ( $\wedge$ ), implikuje ( $\Rightarrow$ ), jest równoważne ( $\Leftrightarrow$ ).

Niech  $p$  i  $q$  będą zdaniami. Poniżej przedstawiamy tzw. *tablicę prawdy* dla podstawowych operacji logicznych:

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| P   | P   | F        | P            | P          | P                 | P                     |
| P   | F   | F        | F            | P          | F                 | F                     |
| F   | P   | P        | F            | P          | P                 | F                     |
| F   | F   | P        | F            | F          | P                 | P                     |

**Przykład 2.** Rozważmy zdania  $p$  i  $q$  następującej treści  
 $p$ :  $2|5$  (czyt. "2 dzieli 5"),  $q$ :  $2|6$  (czyt. "2 dzieli 6")  
 Zdanie  $p$  jest fałszywe, zdanie  $q$  prawdziwe. Ponadto, postępując się tablicą orzekamy, że  
 $p \wedge q$  jest zdaniem fałszywym;  
 $p \vee q$  jest zdaniem prawdziwym;  
 $p \Rightarrow q$  jest zdaniem prawdziwym;  
 $p \Leftrightarrow q$  jest zdaniem fałszywym.

**Uwaga 1.** Jeżeli twierdzenie matematyczne jest sformułowane w postaci implikacji  $p \Rightarrow q$ , to  $p$  nazywamy założeniem tego twierdzenia, a  $q$  jego tezę.

**Uwaga 2.** Przy dowodzeniu twierdzeń matematycznych często stosuje się tzw. **tautologie logiczne**, czyli wyrażenia, które stają się zdaniami prawdziwymi, niezależnie od wartości logicznych zdań  $p$  i  $q$ .

**Przykład 3.** Prawo kontrapozycji

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p)).$$

### 1.3. Kwantyfikatory.

$\exists$  - "istnieje";

$\forall$  - "dla każdego";

**Przykład 4.** Stwierdzenie: istnieje liczba naturalna większa niż 5 możemy zapisać krótko

$$\exists_{n \in \mathbb{N}} \quad n > 5$$

Stwierdzenie: każda liczba naturalna jest podzielna przez 3 możemy zapisać krótko

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad 3|n.$$

**Przykład 5.** Negacja wyrażień z kwantyfikatorem

$$\neg(\exists_{x \in X} \quad p) \Leftrightarrow \forall_{x \in X} \quad \neg p$$

$$\neg(\forall_{x \in X} \quad p) \Leftrightarrow \exists_{x \in X} \quad \neg p$$

**Uwaga 3.** Porządek kwantyfikatorów jest bardzo ważny!

**Przykład 6.**

$$\begin{aligned}\forall_{x \in \mathbb{Z}} \quad \exists_{y \in \mathbb{Z}} \quad x < y & \text{ (prawda);} \\ \exists_{y \in \mathbb{Z}} \quad \forall_{x \in \mathbb{Z}} \quad x < y & \text{ (fałsz);}\end{aligned}$$

**1.4. Zbiory.** Zbiory będziemy zwyczajowo oznaczać wielkimi literami  $A, B, \dots, X, Y, \dots$ , a ich elementy - małymi:  $a, b, \dots, x, y, \dots$ . Niektóre zbiory są tak ważne, że mają zarezerwowane dla siebie własne symbole. I tak

- (1)  $\mathbb{C}$  - zbiór liczb zespolonych;
- (2)  $\mathbb{R}$  - zbiór liczb rzeczywistych;
- (3)  $\mathbb{Q}$  - zbiór liczb wymiernych;
- (4)  $\mathbb{Z}$  - zbiór liczb całkowitych;
- (5)  $\mathbb{N}$  - zbiór liczb naturalnych.

Przynależność do zbioru zapisujemy następująco:

$a \in A$ , co czytamy " $a$  jest elementem zbioru  $A$ " (albo " $a$  należy do  $A$ ");

$a \notin A$ , co czytamy " $a$  nie jest elementem zbioru  $A$ " (" $a$  nie należy do  $A$ ").

Symbolem  $\emptyset$  oznaczamy zbiór pusty, czyli taki, który nie ma żadnych elementów.

Zbiór możemy opisać wymieniając w klamrowym nawiasie jego elementy (kolejność nie ma znaczenia), np.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Inny sposób opisywania zbiorów

$$\{x \in X \mid \phi(x)\},$$

co czytamy "zbiór tych elementów  $x \in X$ , dla których spełniony jest warunek  $\phi(x)$ ".

Przykładowo zbiór  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$  składa się ze wszystkich tych liczb rzeczywistych, które spełniają równanie  $x^2 + x - 6 = 0$ . Dokładniej,  $B = \{-3, 2\}$ .

Mówimy, że zbiór  $A$  jest podzbiorem zbioru  $B$ , jeżeli każdy element zbioru  $A$  jest również elementem zbioru  $B$ . Piszemy wtedy  $A \subset B$ . Przykładowo, zbiór  $\{7, 2\} \subset \{-10, 2, \pi, 7, 15\}$ .

Podstawowe operacje na zbiorach:

- (1) suma mnogościowa zbiorów  $A$  i  $B$ ,

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

- (2) iloczyn mnogościowy zbiorów  $A$  i  $B$ ,

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

- (3) różnica mnogościowa zbiorów  $A$  i  $B$ ,

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}.$$

**Definicja 2. Produktem (iloczynem) kartezjańskim** zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych  $(a, b)$ , takich, że  $a \in A, b \in B$ , piszemy wtedy  $A \times B$ .

### 1.5. Funkcje.

**Definicja 3.** Niech  $X$  i  $Y$  będą dowolnymi niepustymi zbiorami. Jeżeli każdemu elementowi  $x \in X$  został przyporządkowany dokładnie jeden element  $y \in Y$ , to mówimy, że określona została funkcja  $f$  odwzorowująca zbiór  $X$  w zbiór  $Y$ . Symbolicznie piszemy

$$f : X \rightarrow Y.$$

Element  $y$  przyporządkowany elementowi  $x$  nazywamy wartością funkcji  $f$  na elemencie  $x$  lub obrazem elementu  $x$  i oznaczamy symbolem  $f(x)$ . Zbiór  $X$  nazywamy dziedziną funkcji, a elementy zbioru  $X$  argumentami funkcji  $f$ . Zbiór wartości funkcji  $f$ , to zbiór wszystkich możliwych wartości  $f(x)$ , kiedy  $x$  przebiega całą dziedzinę. Zbiór wartości funkcji  $f$  oznaczamy  $f(X)$ .

**Uwaga 4.** Zamiast słowa funkcja używać będziemy zamiennie także słów odwzorowanie, przekształcenie, przy czym zawsze mamy w pamięci powyższą definicję.

**Przykład 7.** Poniżej podajemy przykłady funkcji określonych za pomocą łatwych "w obsłudze" recept:

- (1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 4$ ;
- (2)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ;
- (3)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ ;
- (4)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^7 + 3x + 1$ ;
- (5)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$ ;
- (6)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$ ;
- (7)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (\cos x, \sin x)$ ;
- (8)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2^x, x + y, e^y)$ ;

Interesować nas będą w dalszej części wykładu pewne własności, które mogą posiadać funkcje.

**Definicja 4.** Funkcję  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy

- (1) **injekcją** (różnowartościową), jeżeli dla dowolnych  $x_1, x_2 \in X$  zachodzi implikacja

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- (2) **surjekcją** ("na"), jeżeli

$$f(X) = Y.$$

(3) **bijekcją**, jeżeli jest injekcją i surjekcją.

**Definicja 5.** Niech  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ . Złożeniem funkcji  $f$  i  $g$  nazywamy funkcję

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

określoną wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Przykład 8.** Niech

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1,$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2.$$

Wtedy

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1,$$

podczas, gdy

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1.$$

**Stwierdzenie 1.** Niech  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, h : Z \rightarrow V$ . Wtedy

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Dowód pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

**Stwierdzenie 2.** Jeżeli  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  są injekcjami (odpowiednio surjekcjami, bijekcjami), to złożenie  $g \circ f$  jest injekcją (surjekcją, bijekcją).

Dowód pozostaje jako ćwiczenie dla chętnych.

**Definicja 6.** Niech  $X$  będzie dowolnym niepustym zbiorem. Funkcję

$$id_X : X \rightarrow X, id_X(x) = x$$

nazywamy tożsamością (identycznością) na zbiorze  $X$ .

**Stwierdzenie 3.** Dla dowolnego odwzorowania  $f : X \rightarrow Y$  zachodzą wzory

$$id_Y \circ f = f,$$

$$f \circ id_X = f.$$

Dowód pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

**Oserwacja 1.** Tożsamość przy składaniu funkcji pełni podobną rolę jak 0 przy dodawaniu liczb, czy 1 przy ich mnożeniu.

**Definicja 7.** Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie bijekcją. Definiujemy funkcję  $g : Y \rightarrow X$  w następujący sposób

$$\forall_{y \in Y} \quad g(y) = \text{jedyny taki element } x \in X, \text{ że } f(x) = y.$$

**Uwaga 5.** Ponieważ  $f$  jest bijekcją, to powyższa definicja jest poprawna. Funkcję  $g$  nazywamy funkcją odwrotną do  $f$  i zwyczajowo oznaczamy  $f^{-1}$  (nie mylić z funkcją  $\frac{1}{f}$ !). Mamy

$$\forall_{x \in X} \forall_{y \in Y} \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

**Przykład 9.**

(1) Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x + 1$ . Wtedy

$$y = 5x + 1$$

$$5x = y - 1$$

$$x = \frac{1}{5}y - \frac{1}{5},$$

a zatem funkcję odwrotną do  $f$  można zapisać wzorem

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5};$$

(2) Niech  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y) = (x + y, x - y)$  (funkcja  $g$  jest bijekcją!). Wtedy

$$g^{-1}(x, y) = \left( \frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2} \right).$$

**Stwierdzenie 4.** Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie bijekcją. Zachodzą wzory

$$f^{-1} \circ f = id_X, f \circ f^{-1} = id_Y.$$

**Dowód.** Pokażemy, że  $f^{-1} \circ f = id_X$ . Dowód drugiej równości jest analogiczny. Niech  $x \in X$  będzie dowolny. Wtedy

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \{ \text{jedyny taki } x' \in X, \text{ że } f(x') = f(x) \} = x = id_X(x).$$

**Wniosek 1.**  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  jest bijekcją.

**Stwierdzenie 5.** Niech  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  będą bijekcjami. Wtedy

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

## 1.6. Podstawowe techniki dowodzenia twierdzeń (warto przeczytać!)

Poniżej zilustrujemy na łatwych do zrozumienia przykładach podstawowe techniki dowodzenia twierdzeń:

(1) Dowód wprost (bezpośredni):

**Twierdzenie 1.** Dla każdego  $x \in \mathbb{Z}$ , jeżeli  $x$  jest nieparzyste, to  $x + 1$  jest parzyste.

*Dowód:* Niech  $x$  będzie dowolną liczbą całkowitą. Załóżmy, że  $x$  jest nieparzyste. Istnieje wówczas liczba całkowita  $w$  taka, że  $x = 2w + 1$ . Po dodaniu do obydwu stron równości jedynki otrzymujemy

$$x + 1 = 2w + 1 + 1$$

$$x + 1 = 2w + 2$$

$$x + 1 = 2(w + 1).$$

Kładziemy  $y = w + 1$ . Wtedy  $x + 1 = 2y$ , czyli  $x + 1$  jest parzyste.  $\square$

- (2) Dowód przez zaprzeczenie (zamiast dowodzić, że coś jest prawdą, dowodzimy, że nie może być nieprawdą).

**Twierdzenie 2.** *Liczba  $\sqrt{3}$  jest niewymierna.*

*Dowód:* Przypuśćmy, że liczba  $\sqrt{3}$  jest wymierna, tzn. że istnieją względnie pierwsze liczby całkowite  $a$  i  $b$  takie, że

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}.$$

Podnosząc powyższe równanie stronami do kwadratu otrzymujemy:  $3 = \frac{a^2}{b^2}$ . Stąd  $3b^2 = a^2$ , a zatem  $a^2$  jest podzielne przez 3, a stąd  $a$  również jest podzielne przez 3. Istnieje zatem liczba całkowita  $k$  taka, że  $a = 3k$ . Stąd  $3b^2 = 9k^2$ , czyli  $b^2 = 3k^2$ . Zatem  $b^2$ , a więc również i  $b$  są podzielne przez 3. 3 jest zatem wspólnym dzielnikiem  $a$  i  $b$ , co przeczy założeniu, że są względnie pierwsze.  $\square$

- (3) Dowód przy użyciu tzw. kontrprzykładu.  
Możemy dowieść, że poniższe stwierdzenie jest nieprawdziwe podając konkretny przykład.  
Każda liczba nieparzysta jest pierwsza.  
Np. 9, 15 są liczbami nieparzystymi, ale nie są to liczby pierwsze.

- (4) Dowód przy użyciu *ZASADY INDUKCJI MATEMATYCZNEJ*

Indukcja matematyczna jest użytecznym narzędziem do dowodów twierdzeń dotyczących liczb naturalnych.

$P(n)$  - stwierdzenie dotyczące liczby naturalnej  $n$ ;

Przykładowo,  $P(n)$  : " $n$  jest wielokrotnością 5";

$P(n)$  : "jeżeli  $n$  jest parzyste, to  $n^2$  jest podzielne przez 4";

**Twierdzenie 3.** *(Zasada indukcji matematycznej)*

Niech  $P(n)$  będzie stwierdzeniem dotyczącym liczby naturalnej  $n$ . Jeżeli

- (a)  $P(0)$  jest prawdziwe i
- (b) prawdziwość  $P(k)$  implikuje prawdziwość  $P(k+1)$  dla każdej liczby naturalnej  $k$ ,

to  $P(n)$  jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

**Przykład 10.** Niech dane będzie następujące stwierdzenie:

dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ , liczba  $6^n - 1$  jest podzielna przez 5.

Stwierdzenie  $P(0)$  oznacza  $6^0 - 1 = 1 - 1 = 0$  jest podzielne przez 5, co jest oczywiście prawdą. Załóżmy, że  $P(k)$  jest prawdziwe. Oznacza to, że  $6^k - 1 = 5t$  dla pewnej liczby naturalnej  $t$ . Mamy

$$6^{k+1} - 1 = 6^{k+1} - 6 + 5 =$$

$$6(6^k - 1) + 5 = 6 \cdot 5t + 5 = 5(6t + 1),$$

co oznacza, że  $P(k+1)$  jest prawdziwe. Ostatecznie, na mocy zasady indukcji matematycznej,  $P(n)$  jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej  $n$ .