

1 Podstawowe pojęcia dotyczące przekształceń liniowych. Macierze przekształceń liniowych

Definicja 1. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Funkcję $T : V \rightarrow W$ nazywamy odwzorowaniem liniowym (homomorfizmem), jeżeli dla dowolnych wektorów $u, v \in V$ i każdego $\lambda \in \mathbb{K}$ spełnione są warunki:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$;
2. $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u)$.

Przykład 1. • Odwzorowanie $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(u_1, u_2) = (u_1 - u_2, u_1 + 2u_2)$ jest odwzorowaniem liniowym.

- Odwzorowanie

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(a, b) = (a, b, a + b)$$

jest liniowe.

- Odwzorowanie

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(a, b) = (a, b, a + b + 1)$$

NIE jest liniowe.

- Odwzorowanie

$$T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, T(a) = a^2$$

NIE jest liniowe.

Definicja 2. Niech $T : V \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Zbiór wszystkich wektorów $v \in V$ takich, że

$$T(v) = \theta_W$$

nazywamy jądrem odwzorowania T i oznaczamy $\text{Ker}(T)$. Zatem

$$\text{Ker}(T) := \{v \in V \mid T(v) = \theta_W\}.$$

Przykład 2. • Dla odwzorowania $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, danego wzorem $T(x, y, z) = (x, y, 0)$,

$$\text{Ker}(T) = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

- Dla odwzorowania $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, danego odwzorowania $T(x, y) = (x - 2y, 0, -y)$

$$\text{Ker}(T) = \{(0, 0)\}.$$

Twierdzenie 1. Jądro odwzorowania liniowego $T : V \rightarrow W$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V .

Dowód. $\text{Ker}(T) \neq \emptyset$, bo $\theta_V \in \text{Ker}(T)$. Rzeczywiście $T(\theta_V) = T(\theta_V + \theta_V) = T(\theta_V) + T(\theta_V)$, czyli $T(\theta_V) = \theta_W$. Ponadto, dla $u, v \in \text{Ker}(T), \lambda \in \mathbb{K}$

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = \theta_W + \theta_W = \theta_W,$$

czyli $u + v \in \text{Ker}(T)$;

$$T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u) = \lambda \cdot \theta_W = \theta_W,$$

czyli $\lambda \cdot u \in \text{Ker}(T)$.

Definicja 3. Obrazem odwzorowania liniowego $T : V \rightarrow W$ nazywamy zbiór $T(V)$ i oznaczamy $\text{Im}(T)$. Dokładniej,

$$\text{Im}(T) := \{T(v) \mid v \in V\}.$$

Przykład 3. Dla odwzorowania $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$, danego wzorem

$$T(a, b, c, d, e) = (a - 2b, 0, d),$$

$$\text{Im}(T) = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \text{Lin}((1, 0, 0), (0, 0, 1)).$$

Twierdzenie 2. Obraz $\text{Im}(T)$ odwzorowania liniowego $T : V \rightarrow W$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej W .

Dowód. $\text{Im}(T) \neq \emptyset$, bo $\theta_W \in \text{Im}(T)$ (przecież $T(\theta_V) = \theta_W$). Załóżmy, że $w, w' \in \text{Im}(T)$. Istnieją wtedy wektory $v, v' \in V$ takie, że $T(v) = w, T(v') = w'$. Wtedy

$$T(v + v') = T(v) + T(v') = w + w',$$

czyli $w + w' \in \text{Im}(T)$. Ponadto dla $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v) = \lambda \cdot w,$$

czyli $\lambda \cdot w \in \text{Im}(T)$.

Twierdzenie 3. Niech $T : V \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym z n -wymiarowej przestrzeni wektorowej V w przestrzeń wektorową W . Wtedy

$$\dim V = n = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

Twierdzenie 4. Niech $T : V \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym. T jest odwzorowaniem różnowartościowym wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Ker}(T) = \{\theta_V\}$.

Dowód. Jeżeli T jest odwzorowaniem różnowartościowym, to $T(v) = \theta_w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v = \theta_v$. Załóżmy, że $\text{Ker}(T) = \{\theta_V\}$ oraz, że $T(u) = T(v)$. Mamy

$$T(u - v) = T(u) - T(v) = T(u) - T(u) = \theta_W,$$

czyli $u - v \in \text{Ker}(T)$, a zatem $u - v = \theta_V$, a stąd $u = v$.

Twierdzenie 5. Niech $T : V \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym, W przestrzenią skończenie wymiarową. T jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim(\text{Im}(T)) = \dim W$.

Definicja 4. Odwzorowanie liniowe $T : V \rightarrow W$, które jest bijekcją nazywamy izomorfizmem. Jeżeli pomiędzy przestrzeniami wektorowymi V i W istnieje izomorfizm, to nazywamy je izomorficznymi.

Twierdzenie 6. Skończenie wymiarowe przestrzenie wektorowe V i W są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam wymiar.

Przykład 4. Wszystkie wymienione poniżej przestrzenie wektorowe są parami izomorficzne.

- $\mathbb{R}^4$;
- $M_2(\mathbb{R})$;
- $M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$;
- $\mathbb{R}_3[x]$;

Oserwacja 1. Jeżeli przestrzeń wektorowa V jest skończenie wymiarowa, to odwzorowanie liniowe $T : V \rightarrow W$ jest określone, i to w sposób jednoznaczny, poprzez wskazanie jego wartości na wektorach dowolnie ustalonej bazy $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$. Rzeczywiście, jeżeli znane są nam wartości $T(e_1), \dots, T(e_n)$, to dla dowolnego

$$v = \alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_n \cdot e_n$$

znamy już wartość $T(v)$, bo

$$T(v) = T(\alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_n \cdot e_n) = \alpha_1 \cdot T(e_1) + \dots + \alpha_n \cdot T(e_n).$$

Z drugiej strony, jeżeli $T' : V \rightarrow W$ także jest odwzorowaniem liniowym i $T(e_i) = T'(e_i)$ dla $i = 1, \dots, n$, to

$$T'(v) = \alpha_1 \cdot T'(e_1) + \dots + \alpha_n \cdot T'(e_n) = \alpha_1 \cdot T(e_1) + \dots + \alpha_n \cdot T(e_n) = T(v),$$

czyli $T = T'$.

Definicja 5. Niech $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B' = \{g_1, \dots, g_m\}$ będą bazami przestrzeni wektorowych odpowiednio V i W (nad ciałem $\mathbb{K}$). Jeżeli $T : V \rightarrow W$ jest odwzorowaniem liniowym i

$$T(e_1) = \lambda_{11}g_1 + \lambda_{21}g_2 + \dots + \lambda_{m1}g_m$$

$$T(e_2) = \lambda_{12}g_1 + \lambda_{22}g_2 + \dots + \lambda_{m2}g_m$$

$$\vdots$$

$$T(e_n) = \lambda_{1n}g_1 + \lambda_{2n}g_2 + \dots + \lambda_{mn}g_m,$$

to macierz

$$A_{BB'} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą odwzorowania T w bazach B i B' .

Przykład 5. Dla odwzorowania liniowego $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ danego wzorem

$$T(x, y, z) = (2x + y, -z)$$

i $B = \{(2, 1, 0), (0, 2, 3), (0, 1, 0)\}$, $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ mamy

$$T(2, 1, 0) = (5, 0) = 5 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1)$$

$$T(0, 2, 3) = (3, -3) = 3 \cdot (1, 0) + (-3) \cdot (0, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = (1, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1)$$

a zatem

$$A_{B,B'}(T) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 7. Jeżeli $A_{B,B'}(T) = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ jest macierzą odwzorowania liniowego $T : V \rightarrow W$ w bazach $B \subset V, B' \subset W$, to

1. $\dim \text{Im}(T) = \text{rz } A_{B,B'}(T)$;
2. $\dim \text{Ker}(T) = n - \text{rz } A_{B,B'}(T)$.