

Definicja 1. Niepusty podzbiór W przestrzeni wektorowej $V(\mathbb{K})$ nazywamy jej podprzestrzenią gdy spełnione są warunki

1. jeżeli $u, v \in W$, to $u + v \in W$;
2. jeżeli $u \in W, \lambda \in \mathbb{K}$, to $\lambda \cdot u \in W$.

Stwierdzenie 1. Jeżeli W jest podprzestrzenią V , to

1. $0 \in W$;
2. jeżeli $u \in W$, to $-u \in W$.

Wniosek 1. Podprzestrzeń W przestrzeni wektorowej V jest przestrzenią wektorową.

Przykład 1. • Niech W będzie zbiorem macierzy 2×2 , które są symetryczne (oznacza to po prostu, że $A^T = A$). W jest podprzestrzenią $M_2(\mathbb{R})$. Aby się o tym przekonać, wystarczy sprawdzić warunki (1), (2) z poprzedniego twierdzenia. W jest oczywiście niepusty (np. $O_2 \in W$). Ponadto, jeżeli $A_1 = A_1^T, A_2 = A_2^T$, to

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2,$$

a zatem jeżeli $A_1, A_2 \in W$, to $A_1 + A_2 \in W$. Jeżeli $A \in W$, to

$$(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T = \lambda \cdot A,$$

czyli $\lambda \cdot A \in W$.

Przykład 2. • Zbiór $W = \{(x, x + z, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$; Rzeczywiście, $W \neq \emptyset$, bo np. $(0, 0, 0) \in W$. Dla $v = (v_1, v_1 + v_3, v_3), (w_1, w_1 + w_3, w_3) \in W$ mamy

$$\begin{aligned} v + w &= (v_1, v_1 + v_3, v_3) + (w_1, w_1 + w_3, w_3) = \\ &= (v_1 + w_1, (v_1 + v_3) + (w_1 + w_3), v_3 + w_3) = \\ &= (v_1 + w_1, (v_1 + w_1) + (v_3 + w_3), v_3 + w_3) \in W; \\ &= \lambda \cdot v = \lambda \cdot (v_1, v_1 + v_3, v_3) = \\ &(\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot (v_1 + v_3), \lambda \cdot v_3) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_3, \lambda \cdot v_3) \end{aligned}$$

Przykład 3. • zbiór W , składający się z macierzy nieodwracalnych stopnia 2, NIE jest podprzestrzenią $M_2(\mathbb{R})$;

- zbiór $W = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ NIE jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$.

Definicja 2. Niech $v_1, \dots, v_k$ będą wektorami w przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$. Wektor $v \in V$ nazywamy kombinacją liniową wektorów $v_1, \dots, v_k$, jeżeli istnieją skalary $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ takie, że

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k.$$

Skalary $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ nazywamy wtedy współczynnikami kombinacji liniowej.

Przykład 4. Dla $V = \mathbb{R}^3, \mathbb{K} = \mathbb{R}$

- wektor $(1, 3, 1)$ jest kombinacją liniową wektorów $(0, 1, 2), (1, 0, -5)$, bo

$$(1, 3, 1) = 3 \cdot (0, 1, 2) + 1 \cdot (1, 0, -5);$$

- wektor $(1, 1, 1)$ jest kombinacją liniową wektorów $(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-1, 0, 1)$, bo np.

$$(1, 1, 1) = 2 \cdot (1, 2, 3) + (-3) \cdot (0, 1, 2) + 1 \cdot (-1, 0, 1).$$

Definicja 3. Niech $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ będzie podzbiorem przestrzeni wektorowej V . Mówimy, że podzbiór S generuje przestrzeń wektorową V , jeżeli każdy wektor z V jest kombinacją liniową wektorów z S .

Przykład 5. • zbiór $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ generuje $\mathbb{R}^3$, bo dowolny wektor $w = (x, y, z)$ można zapisać w postaci

$$w = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1);$$

- zbiór $S = \{1, x, x^2\}$ generuje $\mathbb{R}_2[x]$, bo dowolny wielomian $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ można zapisać w postaci

$$p(x) = a \cdot (1) + b \cdot (x) + c \cdot (x^2);$$

- zbiór $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\}$ generuje $\mathbb{R}^3$;

Definicja 4. Jeżeli $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ jest podzbiorem wektorów przestrzeni wektorowej $X(\mathbb{K})$, to powłoką liniową $\text{Lin } S$ nazywamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów ze zbioru S , dokładniej

$$\text{Lin } S = \{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

Twierdzenie 1. Niech $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ będzie podzbiorem wektorów w przestrzeni wektorowej $V(\mathbb{K})$. Zbiór $\text{Lin } S$ jest podprzestrzenią liniową V .

Dowód. Niech $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k, w = \beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_k \cdot v_k$ dla pewnych $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{K}$. Wtedy

$$v + w = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot v_1 + \dots + (\alpha_k + \beta_k) \cdot v_k \in \text{Lin } S;$$

$$\lambda \cdot v = (\lambda \alpha_1) \cdot v_1 + \dots + (\lambda \alpha_k) \cdot v_k \in \text{Lin } S.$$

Oserwacja 1. Niech $v_1, \dots, v_k$ będą wektorami w przestrzeni wektorowej $V(\mathbb{K})$. Równanie

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = \theta$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie, dokładniej $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Definicja 5 (Liniowa niezależność wektorów). *Podzbiór wektorów $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ przestrzeni wektorowej $V(\mathbb{K})$ nazywamy liniowo niezależnym jeżeli jedynym rozwiązaniem równania*

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = \theta$$

jest $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Mówimy, że zbiór S jest liniowo zależny, jeżeli nie jest liniowo niezależny.

Oserwacja 2. *Jeżeli podzbiór wektorów $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ jest liniowo zależny, to istnieją skalary $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, nie wszystkie równe 0, takie, że*

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = \theta.$$

Wówczas każdy wektor spośród $v_1, \dots, v_k$, przy którym współczynnik w kombinacji $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k$ jest niezerowy daje się przedstawić jako kombinacja liniowa pozostałych wektorów. Załóżmy np., że $\lambda_1 \neq 0$. Wtedy

$$v_1 = -(\lambda_1^{-1} \lambda_2) \cdot v_2 - \dots - (\lambda_1^{-1} \lambda_k) \cdot v_k.$$

Powyższa obserwacja daje nam następujące stwierdzenie

Stwierdzenie 2. *Zbiór $S = \{v_1, \dots, v_k\}$, $k \geq 2$, jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z wektorów $v_1, \dots, v_k$ jest wartością kombinacji liniowej pozostałych.*

Przykład 6. • *zbiór $S = \{(1, 2), (2, 4)\} \subset \mathbb{R}^2$ jest liniowo zależny, bo $(2, 4) = 2 \cdot (1, 2)$;*

• *zbiór $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ jest liniowo niezależny;*

• *podzbiór $S = \{1 + x - 2x^2, 2 + 5x - x^2, x + x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ jest liniowo zależny.*

0.1 Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Definicja 6. *Zbiór wektorów $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ przestrzeni wektorowej V nazywamy bazą tej przestrzeni, jeżeli*

1. *S generuje V ;*
2. *S jest liniowo niezależny.*

Uwaga 1. *Z powyższej definicji wcale nie wynika, że każda przestrzeń wektorowa posiada bazę złożoną ze skończonej liczby elementów. Przestrzeń wektorową, która ma taką bazę nazywamy skończenie wymiarową (w przeciwnym przypadku mówimy o przestrzeni nieskończenie wymiarowej). Co istotne, w naszym wykładzie interesować nas będą zawsze przestrzenie skończenie wymiarowe.*

Przykład 7. • zbiór $= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ jest bazą $\mathbb{R}^3$ (baza ta nazywana jest standardową); bardziej ogólnie wektory

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

tworzą bazę $\mathbb{R}^n$.

- $S = \{(1, 1), (1, -1)\}$ jest niestandardową bazą $\mathbb{R}^2$;
- $S = \{1, x, x^2\}$ jest bazą $\mathbb{R}_2[x]$;
- $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ jest bazą $M_2(\mathbb{R})$.

Twierdzenie 2. Niech $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ będzie bazą przestrzeni wektorowej $V(\mathbb{K})$. Każdy wektor przestrzeni V można zapisać tylko w jeden sposób jako wartość kombinacji liniowej wektorów $v_1, \dots, v_k$.

Dowód. Ponieważ S stanowi bazę V , to dowolny wektor $v \in V$ jest wartością kombinacji liniowej wektorów $v_1, \dots, v_k$, tzn. istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ takie, że

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k.$$

Dla pokazania jednoznaczności takiego przedstawienia, przypuśćmy, że v daje się zapisać jako wartość kombinacji liniowej wektorów $v_1, \dots, v_k$ na jeszcze jeden sposób, powiedzmy

$$v = \beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_k \cdot v_k.$$

Wtedy

$$v - v = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot v_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k) \cdot v_k.$$

Ponieważ S jest liniowo niezależny, to $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \dots, \alpha_k - \beta_k = 0$, a to oznacza, że $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$.

Twierdzenie 3. Jeżeli przestrzeń wektorowa V ma bazę składającą się z n wektorów, to każda inna baza tej przestrzeni ma również n wektorów.

Przykład 8. Zbiór $S = \{(3, 2, 1), (7, -1, 4)\}$ nie może być bazą $\mathbb{R}^3$, zbiór $S' = \{x + 2, x^2, x^3 - 1, 3x + 1, x^2 - 2x + 3\}$ nie jest bazą $\mathbb{R}_3[x]$.

Definicja 7. Jeżeli przestrzeń wektorowa V ma bazę składającą się z n wektorów, to liczbę n nazywamy wymiarem przestrzeni wektorowej V i piszemy

$$\dim V = n.$$

Przykład 9. • $\dim \mathbb{R}^n = n$;

- $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$;
- $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$.

Definicja 8. Niech $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ będzie bazą uporządkowaną przestrzeni wektorowej V , zaś x wektorem w V takim, że

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Skalary $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nazywamy współrzędnymi wektora x w bazie B i piszemy

$$x = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]_B.$$

Przykład 10. • Dla wektora $x = (1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ oraz bazy $B = \{(1, 0, 1), (0, -1, 2), (2, 3, -5)\}$ mamy $x = [5, -8, -2]_B$.

- Dla wektora $y = 3x^2 - x + 14 \in \mathbb{R}_2[x]$ oraz bazy $B = \{x^2, x, 1\}$, mamy $y = [3, -1, 14]_B$.

- Dla wektora $x = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ oraz bazy $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$, mamy $x = [3, 7, 2, 1]_B$.

Definicja 9. Niech $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ i $B' = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ będą dwiema uporządkowanymi bazami n -wymiarowej przestrzeni $V(\mathbb{K})$. Jeżeli

$$g_1 = \lambda_{11}e_1 + \lambda_{21}e_2 + \dots + \lambda_{n1}e_n$$

$$g_2 = \lambda_{12}e_1 + \lambda_{22}e_2 + \dots + \lambda_{n2}e_n$$

$$\vdots$$

$$g_n = \lambda_{1n}e_1 + \lambda_{2n}e_2 + \dots + \lambda_{nn}e_n,$$

to macierz

$$P_{BB'} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą przejścia z bazy B do B' .

Przykład 11. $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, $B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ są bazami $\mathbb{R}^3$. Znajdziemy macierz przejścia z bazy B do bazy B' .

$$(1, 0, 0) = 0 \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (1, 0, 0),$$

$$(0, 1, 0) = 0 \cdot (1, 1, 1) + 1 \cdot (1, 1, 0) + (-1) \cdot (1, 0, 0),$$

$$(0, 0, 1) = 1 \cdot (1, 1, 1) + (-1) \cdot (1, 1, 0) + 0 \cdot (1, 0, 0),$$

czyli

$$P_{BB'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 4. Jeżeli $P_{BB'}$ jest macierzą przejścia z bazy B do bazy B' przestrzeni wektorowej V , to dla $x = [c_1, \dots, c_n]_B = [c'_1, \dots, c'_n]_{B'} \in V$ mamy

- $[c_1, \dots, c_n]_B^T = P_{BB'}[c'_1, \dots, c'_n]_{B'}^T$;
- $[c'_1, \dots, c'_n]_{B'}^T = P_{BB'}^{-1}[c_1, \dots, c_n]_B^T$.

Przykład 12. Wektor $x = (2, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ posiada w bazach B, B' z ostatniego przykładu współrzędne

$$x = [1, 1, 0]_B = [2, 2, 1]_{B'}.$$

Z drugiej strony

$$P_{BB'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$