

Wektory na płaszczyźnie

- Geometrycznie, wektor na płaszczyźnie reprezentowany jest jako odcinek skierowany, którego początkiem jest punkt $(0, 0)$, a końcem punkt (x_1, x_2) .
- Analitycznie, wektor reprezentowany jest przez parę uporządkowaną, której używa się do oznaczenia punktu końcowego, dokładniej $x = (x_1, x_2)$. Wektory $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $u_1 = v_1$ i $u_2 = v_2$.

Uwaga 1. Termin *wektor* pochodzi od łacińskiego słowa **vectus**, które oznacza nieść. Intuicyjnie rzecz ujmując, gdyby należało przenieść coś z punktu $(0, 0)$ do punktu (x_1, x_2) , to droga może być reprezentowana przez odcinek łączący punkt $(0, 0)$ z punktem (x_1, x_2) .

Operacje na wektorach:

- dodawanie wektorów; dla $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ definiujemy operację dodawania wektorów

$$u + v = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2);$$

- mnożenie wektorów przez skalar; dla $u = (u_1, u_2), \lambda \in \mathbb{R}$ definiujemy operację mnożenia wektora przez liczbę

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (u_1, u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2);$$

Przykład 1. Niech $u = (2, 3), v = (-1, -3)$. Wtedy $u + v = (1, 0), 2 \cdot u = (4, 6), 2 \cdot u - 4v = (8, 18)$.

Wprowadzamy oznaczenia $\theta := (0, 0)$ - wektor zerowy, $-u := (-1) \cdot u = (-u_1, -u_2)$ - wektor przeciwny do wektora $u = (u_1, u_2)$.

Twierdzenie 1 (Własności operacji na wektorach). Niech u, v, w będą wektorami na płaszczyźnie, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $u + v$ jest wektorem na płaszczyźnie;
2. $u + v = v + u$;
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$;
4. $u + \theta = u$;
5. $u + (-u) = \theta$;
6. $\alpha \cdot v$ jest wektorem na płaszczyźnie;
7. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;
8. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$;

$$9. \alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u;$$

$$10. 1 \cdot u = u.$$

Dowód. Dowód każdej z powyższych własności wymaga po prostu bezpośredniego zastosowania definicji dodawania, bądź mnożenia przez skalar wektorów na płaszczyźnie. Pokażemy przykładowo, że prawdziwa jest własność (3). Niech $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2)$.

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= [(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] + (w_1, w_2) = \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) = \\ &= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2) = \\ &= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2)) = \\ &= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) = \\ &= (u_1, u_2) + [(v_1, v_2) + (w_1, w_2)] = u + (v + w). \end{aligned}$$

Wektory w $\mathbb{R}^n$.

Wektor w $\mathbb{R}^n$ reprezentowany jest przez n -kę uporządkowaną $(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Wektory $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$.

Definicja 1. Niech $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ będą wektorami w $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiujemy operacje

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n);$$

$$\lambda \cdot u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n).$$

Przykład 2. Dla $u = (2, -1, 5, 0), v = (4, 3, 1, -1), w = (-6, 2, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$

$$2u - (v + 3w) = (18, -11, 9, -8);$$

Komentarz 1. Wprowadzamy oznaczenia $\theta = (0, \dots, 0)$ (wektor zerowy), $-u = -1 \cdot u = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$ (wektor przeciwny do wektora u). Twierdzenie wymieniające własności dodawania i mnożenia przez skalar w $\mathbb{R}^2$ można przepisać na przypadek dodawania i mnożenia przez skalar w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 2. Niech u, v będą wektorami w $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Prawdziwe są następujące własności:

1. jeżeli $v + u = v$, to $u = \theta$;
2. jeżeli $v + u = \theta$, to $u = -v$;
3. $0 \cdot v = \theta$;
4. $\lambda \cdot \theta = \theta$;

5. jeżeli $\lambda \cdot v = \theta$, to $\lambda = 0$ lub $v = \theta$.

6. $-(-v) = v$.

Dowód. Pokażemy, że zachodzi np. (1). Załóżmy, że $v + u = v$. Wtedy

$$(v + u) + (-v) = v + (-v),$$

$$(v + u) + (-v) = \theta,$$

$$v + (u + (-v)) = \theta,$$

$$v + ((-v) + u) = \theta,$$

$$(v + (-v)) + u = \theta,$$

$$\theta + u = \theta;$$

$$u = \theta.$$

Przestrzenie wektorowe

Definicja 2. Czwórkę $(X, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$, gdzie X jest niepustym zbiorem, $\mathbb{K}$ ciałem, $\oplus : X \times X \rightarrow X$, zaś $\odot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ nazywamy przestrzenią wektorową (liniową), jeżeli

1. $(X, \oplus)$ jest grupą abelową;
2. dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i $x, y \in X$
 - $(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$;
 - $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$;
 - $\alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \cdot \beta) \odot x$;
 - $1 \odot x = x$.

Elementy zbioru X nazywamy wektorami. Element neutralny działania $\oplus$ nazywamy wektorem zerowym i oznaczmy symbolem θ .

Komentarz 2. W dalszych rozważaniach symbole $\oplus, \odot$ zastąpimy odpowiednio symbolami $+, \cdot$. Często w przypadku przestrzeni wektorowych $(X, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$, dla których $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ będziemy mówić dla uproszczenia po prostu przestrzeń wektorowa X , ewentualnie $X(\mathbb{K})$.

Przykład 3 (Przykłady przestrzeni wektorowych). • $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową (zbiór $\mathbb{R}^2$ rozumiemy jako zbiór wektorów, $+$ oznacza dodawanie wektorów, $\cdot$ mnożenie wektora przez skalar);

- bardziej ogólnie, $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową;
- $(M_{m \times n}(\mathbb{K}), \mathbb{K}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową ($+$ oznacza tym razem dodawanie macierzy, a $\cdot$ mnożenie macierzy przez skalar);

- $(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}, +, \cdot)$;

Twierdzenie 3. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$, $v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$. Prawdziwe są własności:

1. $0 \cdot v = \theta$;
2. $\lambda \cdot \theta = \theta$;
3. Jeżeli $\lambda \cdot v = \theta$, to $\lambda = 0$ lub $v = \theta$.

Dowód. Dla dowodu własności (1) – (4) wystarczy użyć aksjomatów z definicji przestrzeni wektorowej. Dla przykładu, pokażemy, że prawdziwa jest (2).

$$\lambda \cdot \theta = \lambda \cdot (\theta + \theta)$$

$$\lambda \cdot \theta = \lambda \cdot \theta + \lambda \cdot \theta / + (-\lambda \cdot \theta)$$

$$\lambda \cdot \theta + (-\lambda \cdot \theta) = (\lambda \cdot \theta + \lambda \cdot \theta) + (-\lambda \cdot \theta)$$

$$\theta = \lambda \cdot \theta + (\lambda \cdot \theta + (-\lambda \cdot \theta))$$

$$\theta = \lambda \cdot \theta + \theta$$

$$\theta = \lambda \cdot \theta.$$

Do dowodu (3) założymy, że $\lambda \cdot v = \theta$. Aby pokazać, że wynika stąd $v = \theta$ lub $\lambda = 0$ założymy, że $\lambda \neq 0$ (jeżeli $\lambda = 0$ to nie ma już czego dowodzić). Ponieważ $\lambda \neq 0$, to możemy użyć elementu λ^{-1} , aby pokazać, że $v = \theta$:

$$v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1} \lambda) \cdot v = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot \theta = \theta.$$