1 Wyznaczniki i metody ich oblicznia. Problem odwracania macierzy

Definicja 1 (Wyznacznik macierzy)**.** *Wyznacznikiem macierzy kwadratowej nazywamy funkcję, która każdej macierzy* $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$ *przypisuje skalar* $\det A \in \mathbb{K}$*, a określona jest wzorem indukcyjnym:*

1. *jeżeli* A *ma stopień 1, to*
$$\det A = a_{11};$$

2. *jeżeli* A *ma stopień* $n \geq 2$*, to*
$$\det A = a_{11} \cdot D_{11} + a_{12} \cdot D_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot D_{1n},$$
gdzie $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$*, przy czym* A_{ij} *oznacza macierz stopnia* $n-1$ *otrzymaną z macierzy* A *poprzez skreślenie* i*-tego wiersza i* j*-tej kolumny.*

Uwaga 1. *Wyznacznik macierzy* A *oznaczamy:* $\det[a_{ij}], |A|$*, a w formie rozwiniętej*

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Przykład 1.

1. $|-126| = -126$;

2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot |5| + (-1)^{1+2} \cdot 3|1| = 7$;

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

Komentarz 1. *W celu obliczania wyznaczników stopnia drugiego i trzeciego bezpośrednio można zastosować wzory:*

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$;

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd.$

Twierdzenie 1 (Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika)**.** *Niech* $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$*,* $n \geq 2$ *oraz niech liczby naturalne* i *oraz* j *będą ustalone,* $1 \leq i, j \leq n$*. Do obliczenia wyznacznika macierzy* A *można zastosować wzory:*

1. $\det A = a_{i1} \cdot D_{i1} + a_{i2} \cdot D_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot D_{in}$;

2. $\det A = a_{1j} \cdot D_{1j} + a_{2j} \cdot D_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot D_{nj}$.

Uwaga 2. *W praktyce możemy zatem wybrać samodzielnie względem, którego wiersza (kolumny) będziemy obliczać wyznacznik. W celu maksymalnego uproszczenia rachunków, oczywiście będziemy zawsze wybierać ten wiersz (kolumnę),w której jest najwięcej zer.*

Przykład 2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + +(-1)^{3+4} \cdot$
$(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$

Twierdzenie 2 (Własności wyznacznika)**.** *Niech $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.*

1. *Jeżeli macierz B można otrzymać z macierzy A poprzez zamianę miejscami dwóch wierszy (kolumn) macierzy A, to*
$$\det B = -\det A.$$
2. *Jeżeli macierz B można otrzymać z macierzy A poprzez dodanie pomnożonego przez skalar wiersza (kolumny) macierzy A do innego wiersza (kolumny) macierzy A, to*
$$\det B = \det A.$$
3. *Jeżeli macierz B można otrzymać z macierzy A poprzez pomnożenie jej wiersza (kolumny) przez stałą $\lambda \in \mathbb{K}$, to*
$$\det B = \lambda \cdot \det A.$$

Twierdzenie 3. *Jeżeli dla macierzy A spełniony jest jeden z warunków*

1. *cały wiersz (albo kolumna) jest zerowy;*
2. *dwa wiersze (albo dwie kolumny) są równe;*
3. *dwa wiersze (kolumny) są proporcjonalne,*

to $\det A = 0$.

Twierdzenie 4 (Inne własności wyznacznika)**.** *Jeżeli $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, to*

1. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ *(tw. Cauchy'ego);*
2. $\det A^T = \det A$.

Definicja 2 (Macierz odwracalna)**.** *Macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$ nazywamy odwracalną, jeżeli istnieje macierz $B \in M_n(\mathbb{K})$ taka, że*
$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$
Macierz B nazywamy macierzą odwrotną do macierzy A i oznaczamy A^{-1}. Macierz, która nie posiada macierzy odwrotnej nazywamy nieodwracalną.

Twierdzenie 5 (Jednoznaczność istnienia macierzy odwrotnej)**.** *Macierz odwracalna posiada dokładnie jedną macierz odwrotną.*

Dowód. *Niech* $A \in M_n(\mathbb{K})$. *Załóżmy, że* $A', A'' \in M_n(\mathbb{K})$ *są macierzami odwrotnymi do* A. *Wtedy*

$$A \cdot A' = I_n = A \cdot A'' / \cdot A'$$
$$A' \cdot (A \cdot A') = A' \cdot (A \cdot A'')$$
$$(A' \cdot A) \cdot A' = (A' \cdot A) \cdot A''$$
$$A' = A''$$

Przykład 3. *1. Niech* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = B$.

2. Macierz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ *nie posiada macierzy odwrotnej.*

Twierdzenie 6. *1. Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det A \neq 0$.

2. Jeżeli macierz A jest odwracalna, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

gdzie $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, *przy czym* A_{ij} *oznacza macierz stopnia* $n-1$ *otrzymaną z macierzy* A *poprzez skreślenie* i*-tego wiersza i* j*-tej kolumny.*

Przykład 4. *1. Niech* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2. Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ *jest nieodwracalna.*

Stwierdzenie 1. *Załóżmy, że macierz C jest odwracalna. Wtedy*

1. *jeśli* $A \cdot C = B \cdot C$, *to* $A = B$;
2. *jeśli* $C \cdot A = C \cdot B$, *to* $A = B$.

Dowód. *Pokażemy, że zachodzi np. (1) (dowód drugiej własności jest analogiczny).*

$$A \cdot C = B \cdot C / \cdot C^{-1};$$
$$(A \cdot C) \cdot C^{-1} = (B \cdot C) \cdot C^{-1};$$
$$A \cdot (C \cdot C^{-1}) = B \cdot (C \cdot C^{-1});$$
$$A \cdot I_n = B \cdot I_n;$$
$$A = B.$$

2 Rząd macierzy i metody jego oblicznia

Definicja 3 (Minor macierzy)**.** *Minorem stopnia $k \in \mathbb{N}_+$ macierzy $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu dowolnie wybranych k kolumn i k wierszy.*

Przykład 5. *Dla* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$*, minory stopnia 2, to np.* $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$, *minor stopnia 3, to np.* $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

Definicja 4. *Rzędem macierzy $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Przyjmujemy, że rząd macierzy zerowej jest równy 0. Rząd macierzy A oznaczamy symbolem $\operatorname{rz} A$.*

Przykład 6. $\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = 3,$ *bo* $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$

Stwierdzenie 2 (Własności rzędu macierzy)**.**
1. *Rząd macierzy odwracalnej jest równy jej stopniowi.*
2. $\operatorname{rz} A^T = \operatorname{rz} A$.

Oserwacja 1. *Wszystkie operacje, które nie zmieniają wartości wyznacznika, albo zmieniają tylko jego znak, zastosowane do macierzy nie zmieniają jej rzędu. Nie zmienia również rzędu macierzy skreślenie wiersza (kolumny) złożonego z samych zer lub jednego z dwóch wierszy (kolumn) równych lub proporcjonalnych.*

Komentarz 2. *Powyższa obserwacja upraszcza sprawę obliczania rzędu macierzy. Zamiast obliczać go od razu wprost z definicji, poszukując największego niezerowego minora, możemy po prostu przekształcać macierz bez zmiany rzędu do takiej postaci, z której w łatwy sposób możemy go już odczytać.*

Przykład 7. *Obliczymy rzędy następujących macierzy:* $\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{w_1 \leftrightarrow w_4}{=}$

$\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \overset{w_2-3w_1, w_3+w_1, w_4-2w_1}{=} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{w_2=-6w_4, w_3=6w_4}{=} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$ 2,

Przykład 8. $\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \overset{w_2-2w_1, w_3-5w_1, w_4-7w_1}{=} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{bmatrix} \overset{w_3=2w_2}{=}$

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{bmatrix} \overset{w_3-2w_2}{=} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3.$$