

1 Macierze, operacje na macierzach i ich własności

Od tej pory przyjmujemy zawsze, że symbol $\mathbb{K}$ oznacza ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}_+$.

Definicja 1. Macierz o m wierszach i n kolumnach oraz wyrazach z ciała $\mathbb{K}$ nazywamy prostokątną tablicę utworzoną z elementów ciała $\mathbb{K}$.

Uwaga 1. Zbiór wszystkich macierzy o m wierszach, n kolumnach i wyrazach z ciała $\mathbb{K}$ oznaczamy symbolem $M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Macierz, w której liczba wierszy wynosi n i jest równa liczbie kolumn nazywamy macierzą kwadratową stopnia n . Zbiór wszystkich macierzy stopnia n o wyrazach z ciała $\mathbb{K}$ oznaczmy $M_n(\mathbb{K})$.

Uwaga 2 (Sposoby notowania macierzy). W zależności od potrzeby stosujemy

- wielkie litery $A, B, C, \dots$;
- odwołanie do wyrazów macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$;
- wypisanie jawnie całej tablicy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Przykład 1 (Przykłady macierzy). • $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$;

• $B = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 2 & 3i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

Definicja 2. Macierze $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ nazywamy równymi, jeżeli

$$a_{ij} = b_{ij}$$

dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Uwaga 3 (Szczególne postaci macierzy): • macierz $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ nazywamy macierzą diagonalną jeżeli $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Przykładowo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

są macierzami diagonalnymi.

- macierz $[a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, w której $a_{ij} = 0$ dla $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ nazywamy macierzą zerową i oznaczamy O_{mn} .

Uwaga 4 (Szczególne postaci macierzy cd:). • *macierz kwadratową* $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$, w której

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

nazywamy *macierzą jednostkową* i oznaczmy I_n .

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

1.1 Operacje na macierzach i ich własności

Definicja 3 (Transponowanie macierzy). Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Macierz $A^T = [a_{ji}] \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ nazywamy *macierz transponowaną* macierzy A .

Przykład 2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Definicja 4 (Dodawanie macierzy). Jeżeli $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, to sumę macierzy A i B nazywamy *macierz wymiaru* $m \times n$ postaci

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Uwaga 5. Suma macierzy różnych wymiarów nie jest zdefiniowana.

Przykład 3. Jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, to

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & 9 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definicja 5 (Mnożenie macierzy przez skalar). Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$. Iloczynem macierzy A przez element ciała λ (skalar) nazywamy macierz

$$\lambda \cdot A = [\lambda \cdot a_{ij}].$$

Umowa 1. $-A := (-1) \cdot A, A - B := A + (-B)$.

Przykład 4. Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$3A - B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -4 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Stwierdzenie 1. Niech $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), a, b \in \mathbb{K}$.

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O_{mn} = O_{mn} + A = A$;
4. $A + (-A) = (-A) + A = O_{mn}$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$;
7. $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$;
8. $a \cdot (b \cdot A) = (ab) \cdot A$.

Wniosek 1. Ze względu na własności (1)-(4) widzimy, że para $(M_{m \times n}(\mathbb{K}), +)$ jest grupą przemienną, w której macierz zerowa jest elementem neutralnym, a elementem przeciwnym do macierzy A jest macierz $-A$.

Definicja 6 (Mnożenie macierzy). Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), B = [b_{ij}] \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$. Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz

$$A \cdot B = [c_{ij}] \in M_{m \times p}(\mathbb{K}),$$

w której

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

dla $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p$.

Przykład 5. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nie istnieją

iloczyn $A \cdot B, B \cdot A$. Dla $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ nie istnieje iloczyn $B \cdot C$, ale $C \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Stwierdzenie 2 (Własności mnożenia macierzy).

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
3. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$;
4. dla $a \in \mathbb{K}, a \cdot (A \cdot B) = (a \cdot A) \cdot B = A \cdot (a \cdot B)$.

Uwaga 6. W powyższym stwierdzeniu, w każdym z podpunktów zakładamy, że wymiary macierzy są takie, że odpowiednie mnożenia, dodawania są wykonalne.

Stwierdzenie 3. Dla $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

$$I_m \cdot A = A \cdot I_n = A.$$

Przykład 6 (Mnożenie macierzy - dalsze przykłady). Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 7. Widzimy na powyższym przykładzie, że mnożenie macierzy nie jest przemienne. Bywa również i tak, że mnożenie "w drugą stronę" (w przypadku tablic niekwadratowych) może nawet wcale nie być wykonalne!

Oserwacja 1. W zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n mnożenie macierzy jest działaniem wewnętrznym.