

Definicja 1. Ciałem (dokładniej - ciałem przemennym) nazywamy zbiór $\mathbb{K}$ wyposażony w dwa działania wewnętrzne - dodawanie $(+)$ i mnożenie $(\cdot)$, które spełniają następujące warunki:

1. $\mathbb{K}$ z dodawaniem jest grupą przemenną, w której element neutralny oznacza się przez 0;
2. mnożenie w zbiorze $\mathbb{K}$ jest przemienne i zbiór $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ z mnożeniem jest grupą;
3. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych elementów $a, b, c \in \mathbb{K}$ (prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania).

Przykład 1. Ciałami są:

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$;
2. $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

Ciałem nie jest $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$.

Stwierdzenie 1 (FUNDAMENTALNA WŁASNOŚĆ CIAŁA). Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem, $a, b \in \mathbb{K}$. Wtedy

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0).$$

Dowód. $(\Leftarrow)$ Załóżmy (bez straty ogólności), że np. $b = 0$. Wtedy $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Mamy zatem równości

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0,$$

$$a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$$

$$0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$$

$$0 = a \cdot 0.$$

Dowód (cd). $(\Rightarrow)$ Załóżmy, że $a \cdot b = 0$, zaś $a \neq 0$. Wtedy a posiada element odwrotny a^{-1} . Mamy

$$a \cdot b = 0 \quad / \cdot a^{-1}$$

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot 0$$

$$1 \cdot b = 0$$

$$b = 0$$

Definicja 2. Parę uporządkowanych liczb rzeczywistych (a, b) nazywamy liczbą zespoloną i notujemy $a + bi$ w tzw. postaci algebraicznej.

Uwaga 1. Zbiór liczb zespolonych oznaczamy literą $\mathbb{C}$.

Definicja 3. Liczbę rzeczywistą a nazywamy częścią rzeczywistą liczby zespolonej $z = a + bi$ i piszemy $\operatorname{Re}(z) = a$, zaś liczbę rzeczywistą b , jej częścią urojoną, co notujemy $\operatorname{Im}(z) = b$.

W zbiorze $\mathbb{C}$ wprowadzamy operacje mnożenia i dodawania liczb zespolonych. Dla $z = a + bi, w = c + di$

- $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
- $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$;

Oserwacja 1. Dla $z = 0 + 1i$

$$z \cdot z = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \cdot i = -1 + 0i.$$

Uwaga 2. Od tej pory w zapisie liczb zespolonych pomijając będziemy 0 oraz $0i$, czyli piszemy np. 2 zamiast $2 + 0i$, $3i$ zamiast $0 + 3i$, będziemy także pisać i zamiast $1i$. W takiej notacji

$$i \cdot i = i^2 = -1.$$

Warto zapamiętać, że mnożenie liczb zespolonych wykonujemy tak jak mnożenie wyrażeń algebraicznych pamiętając, że $i^2 = -1$.

Przykład 2.

- $(3 - i) + (2 + 3i) = 3 - i + 2 + 3i = 5 + 2i, \operatorname{Re}(5 + 2i) = 5, \operatorname{Im}(5 + 2i) = 2$;
- $(3 + 2i) \cdot (3 - 2i) = 13, \operatorname{Re}(13) = 13, \operatorname{Im}(13) = 0$;
- $(3 + 2i)^2 = 5 + 12i, \operatorname{Re}(5 + 12i) = 5, \operatorname{Im}(5 + 12i) = 12$.

Twierdzenie 1. Zbór $\mathbb{C}$ wraz z dodawaniem i mnożeniem liczb zespolonych zdefiniowanym jak wcześniej jest ciałem.

Dowód polega na bezpośrednim sprawdzeniu wszystkich warunków z definicji ciała.

Oserwacja 2. Elementem neutralnym dla dodawania liczb zespolonych jest 0 , a dla mnożenia 1 . Elementem przeciwnym do $a + bi$ jest liczba zespolona $-a + (-b)i := -a - bi$. Rzeczywiście $(a + bi) + (-a - bi) = a - a + (b - b)i = 0 + 0i = 0$.

Twierdzenie 2 (ZASADNICZE TWIERDZENIE ALGEBRY). Każdy wielomian zespolony stopnia $n \geq 1$ ma pierwiastek w ciele liczb zespolonych.

Definicja 4. Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną. Liczbę $\bar{z} = a - bi$ nazywamy liczbą zespoloną sprzężoną z liczbą zespoloną z . Modułem liczby zespolonej z nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Stwierdzenie 2. Niech $z = a + bi$. Wtedy

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

- $|z| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 0$.

Dowód. • $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$;

- $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Wniosek 1. Dla liczby zespolonej $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Umowa 1. Od tej pory zapis $\frac{a+bi}{c+di}$ będziemy rozumieć jako

$$(a + bi) \cdot (c + di)^{-1}.$$

Komentarz 1. Dla każdej liczby rzeczywistej α

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Z drugiej strony, jeżeli $p, q \in \mathbb{R}$ spełniają warunek $p^2 + q^2 = 1$, to istnieje liczba rzeczywista θ taka, że $\cos \theta = p, \sin \theta = q$. Liczba θ wyznaczona jest z dokładnością do całkowitej wielokrotności 2π . Jeżeli $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, to możemy zapisać

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right),$$

przy czym

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

Istnieje zatem liczba $\theta \in \mathbb{R}$ taka, że

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|z|} \end{cases},$$

Definicja 5. Argumentem liczby zespolonej $z = a + bi \neq 0$ nazywamy każdą liczbę $\theta \in \mathbb{R}$ spełniającą układ równań

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}.$$

Przyjmujemy, że argumentem liczby zespolonej $z = 0$ jest dowolna liczba rzeczywista θ . Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument θ tej liczby spełniający nierówność

$$0 \leq \theta < 2\pi.$$

Przyjmujemy, że argumentem głównym liczby zespolonej $z = 0$ jest 0 .

Uwaga 3. Dla $z = a + bi \neq 0$, zapis $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, gdzie θ jest argumentem liczby zespolonej z nazywamy postacią trygonometryczną liczby zespolonej z .

Przykład 3.

1. $2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right);$
2. $-2 - 2\sqrt{3}i = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right);$
3. $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$

Twierdzenie 3. Dla

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1),$$

$$z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

1. $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2));$
2. jeśli $z_2 \neq 0$, to $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2));$

Innymi słowy, mnożąc dwie liczby zespolone mnożymy ich moduły, a argument dodajemy, zaś dzieląc dwie liczby zespolone, dzielimy ich moduły, a argumenty odejmujemy.

Przykład 4. Niech

$$z_1 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$z_2 = 8\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right).$$

Wtedy $z_1 \cdot z_2 = 16\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right).$

Oserwacja 3.

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$z^3 = |z|^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

$\vdots$

Twierdzenie 4 (Twierdzenie De Moivre'a). Dla $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Przykład 5. $(1 + i)^{2012} = (\sqrt{2})^{2012}(\cos 503\pi + i \sin 503\pi) = -2^{1006}.$

Definicja 6 (Przypomnienie). Pierwiastkiem arytmetycznym stopnia n ($n \in \mathbb{N}_+$) z nieujemnej liczby rzeczywistej a nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą b taką, że

$$b^n = a,$$

co notujemy $\sqrt[n]{a} = b$.

Definicja 7. *Pierwiastkiem stopnia n ($n \in \mathbb{N}_+$) z liczby zespolonej z nazywamy taką liczbę zespoloną w , że*

$$w^n = z.$$

Uwaga 4. *Pierwiastek z liczby zespolonej nie jest wyznaczony jednoznacznie (oprócz zera).*

Stwierdzenie 3 (Wzór na pierwiastki z liczby zespolonej). *Każda liczba zespolona $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0$ ma dokładnie n pierwiastków stopnia n . Zbiór tych pierwiastków ma postać*

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, \dots, z_{n-1}\},$$

gdzie

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

dla $k = 0, \dots, n-1$.

Przykład 6. $\sqrt[4]{16} = ?$, $16 = 16(\cos 0 + i \sin 0)$, $z_0 = \sqrt[4]{16}(\cos 0 + i \sin 0) = 2$, $z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 2i$, $z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$, $z_3 = 2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = -2i$, $\sqrt[4]{16} = \{2, -2, 2i, -2i\}$.