

Lista 9: Baza i wymiar przestrzeni liniowej

1. Podaj standardowe bazy wskazanych przestrzeni liniowych

- | | | |
|----------------------|------------------------------------|-------------------------|
| (a) $\mathbb{R}^6$; | (c) $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$; | (e) $\mathbb{R}_4[x]$; |
| (b) $\mathbb{R}^4$; | (d) $M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$; | (f) $\mathbb{R}_2[x]$. |

2. Wyjaśnij dlaczego zbiór S **nie jest** bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$;

- | | |
|---|--|
| (a) $S = \{(1, 3, 0), (4, 1, 2), (-2, 5, -2)\}$; | (d) $S = \{(1, 1, 2), (0, 2, 1)\}$; |
| (b) $S = \{(2, 1, -2), (-2, -1, 2), (4, 2, -4)\}$; | (e) $S = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$; |
| (c) $S = \{(7, 0, 3), (8, -4, 1)\}$; | (f) $S = \{(6, 4, 1), (3, -5, 1), (8, 13, 6), (0, 6, 9)\}$. |

3. Wyjaśnij dlaczego zbiór S **nie jest** bazą przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (a) $S = \{1, 2x, x^2 - 4x, 5x\}$; | (c) $S = \{1 - x, 1 - x^2, 3x^2 - 2x - 1\}$; |
| (b) $S = \{2, x, x + 3, 3x^2\}$; | (d) $S = \{6x - 3, 3x^2, 1 - 2x - x^2\}$. |

4. Wyjaśnij dlaczego zbiór S **nie jest** bazą przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$.

- | | |
|---|--|
| (a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$; | (c) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \right\}$; |
| (b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$; | (d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. |

5. Sprawdź, czy podany zbiór wektorów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

- | | |
|---|--|
| (a) $\{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (0, 0, 1)\}$; | (c) $\{(0, 2, -1), (1, 1, 1), (2, 5, 0)\}$; |
| (b) $\{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$; | (d) $\{(0, 2, -1), (1, 1, 1), (1, 3, 0)\}$. |

6. Sprawdź, czy podany zbiór wektorów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$:

- | | |
|---|------------------------------|
| (a) $\{x^2 - x + 1, 2x + 1, 2x - 1\}$; | (b) $\{x + x^2, x - x^2\}$. |
|---|------------------------------|

7. Podany wektor przedstaw jako kombinację liniową wektorów bazowych:

- | |
|--|
| (a) $(1, 2), B = \{(1, 1), (-1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$; |
| (b) $(3, -1), B = \{(1, -1), (1, 1)\}$; |
| (c) $(3, -1), B = \{(1, 2), (1, 3)\}$. |

8. Wskaż wymiary podanych przestrzeni wektorowych

- | | | |
|----------------------|-------------------------|------------------------------------|
| (a) $\mathbb{R}^6$; | (d) $\mathbb{R}^3$; | (g) $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$; |
| (b) $\mathbb{R}^4$; | (e) $\mathbb{R}_7[x]$; | (h) $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$; |
| (c) $\mathbb{R}$; | (f) $\mathbb{R}_4[x]$; | (i) $M_{1 \times 4}(\mathbb{R})$. |

9. Znaleźć bazę i wymiar podanej przestrzeni liniowej

- (a) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - w + z = 0\}$;
- (b) $\{(a + b, a + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$;
- (c) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 + a_1 = 0 \text{ i } a_2 - 2a_3 = 0\} \subset \mathbb{R}_3[x]$;
- (d) $\{(2s - t, s, t, s) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$;
- (e) $\{(5t, -3t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$;
- (f) $\{(s + 4t, t, s, 2s - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

10. Znaleźć bazę dla przestrzeni wektorowej macierzy diagonalnych 3×3 . Jaki jest wymiar tej przestrzeni?

11. Znaleźć bazę dla przestrzeni wektorowej macierzy symetrycznych 3×3 . Jaki jest wymiar tej przestrzeni?