

Lista 8: Wektory w przestrzeni liniowej

1. Opisz jak wygląda wektor zerowy w podanej przestrzeni liniowej

- | | |
|-------------------------|------------------------------------|
| (a) $\mathbb{R}^4$; | (d) $M_{1 \times 4}(\mathbb{R})$; |
| (b) $\mathbb{R}_3[x]$; | (e) $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$; |
| (c) $\mathbb{R}_4[x]$; | (f) $M_4(\mathbb{R})$. |

2. Czy podane wektory są liniowo niezależne we wskazanych przestrzeniach liniowych? Odpowiedź uzasadnij.

- | | |
|---|---|
| (a) $(1, 1), (0, 2)$ w $\mathbb{R}^2$, | (c) $\sqrt{2}$ i 2 w $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, |
| (b) $(1, 0), (1, 1), (0, 1)$ w $\mathbb{R}^2$, | (d) $\sqrt{2}$ i 2 w $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. |

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zbadać liniową niezależność wektorów:

- | | |
|---|--|
| (a) $(1, 2, 3)$ oraz $(-2, -4, -6)$, | (c) $(1, -1, 0), (2, 1, 1)$ i $(3, 0, 2)$, |
| (b) $(1, 0, 1), (-1, 2, 1)$ i $(0, 2, 2)$, | (d) $(1, 4, 3), (-1, 2, -1)$ i $(0, 6, 4)$. |

4. Sprawdź, czy podany wektor jest kombinacją liniową wektorów ze zbioru S , jeżeli

(a) $S = \{(2, -1, 3), (5, 0, 4)\}$

- i. $u = (1, 1, -1)$;
ii. $v = (8, -\frac{1}{8}, \frac{27}{4})$;

- iii. $w = (1, -8, 12)$;
iv. $z = (-1, -2, 2)$.

(b) $S = \{(2, 0, 7), (2, 4, 5), (2, -12, 13)\}$

- i. $u = (1, -5, -5)$;
ii. $v = (-2, -6, 6)$;

- iii. $w = (-1, -22, 22)$;
iv. $z = (-4, -3, 3)$

5. Sprawdzić, czy podana macierz jest kombinacją liniową macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & -19 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} -2 & 28 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Sprawdzić, czy macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 22 & 23 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne w przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$.

7. Sprawdź, czy podane wektory są liniowo niezależne w $\mathbb{R}_2[x]$.

(a) $2 - x, 2x - x^2, 6 - 5x + x^2$;

(b) $x^2 - 1, 2x + 5$;

(c) $x^2 + 3x + 1, 2x^2 + x - 1, 4x$;

(d) $x^2, x^2 + 1$.

8. Dla jakich wartości parametru a zbiór wektorów:

(a) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (a, 1, 1)\}$,

(b) $\{(1, 1, a), (2, 1, 4), (4, 2, 8)\}$

jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

9. Sprawdź, czy spełniona jest zależność:

(a) $(1, 1, -1) \in \text{Lin}((2, -1, 3), (5, 0, 4))$,

(b) $(1, -8, 12) \in \text{Lin}((2, -1, 3), (5, 0, 4))$,

(c) $(-1, -2, 2) \in \text{Lin}((2, -1, 3), (5, 0, 4))$,

(d) $\text{Lin}((1, 2, 1), (4, 1, 2)) = \text{Lin}((-2, 3, 0), (3, -1, 1))$.

Czy $a_i \in \text{Lin}(a_1, \dots, a_k)$ dla $i = 1, \dots, k$?

10. Zbadaj, czy zbiór S generuje $\mathbb{R}^2$, jeżeli

(a) $S = \{(2, 1), (-1, 2)\}$;

(c) $S = \{(1, 3), (2, -6), (4, 12)\}$;

(b) $S = \{(-1, 4), (4, -1), (1, 1)\}$;

(d) $S = \{(1, 1)\}$.

11. Czy wektory $1, x^2, x^2 + 2$ generują przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$?

12. Czy wektory $x^2 - 2x, x^3 + 8, x^3 - x^2, x^2 - 4$ generują przestrzeń $\mathbb{R}_3[x]$?