

Lista 7: Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie

1. W zbiorze $\mathbb{R}^2$ określamy działania dodawania

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v),$$

oraz mnożenia przez skalar

$$\alpha \circ (x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{R}^2$ wraz z tak określonymi działaniami jest przestrzenią wektorową.

2. W zbiorze $\mathbb{R}^2$ określono działania dodawania

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v),$$

dla wszystkich $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ oraz działanie mnożenia przez skalar

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, y)$$

dla $\alpha \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zbiór $\mathbb{R}^2$ z tak określonymi działaniami **nie jest** przestrzenią wektorową. Następujące aksjomaty przestrzeni wektorowej nie są spełnione (odwołaj się do definicji przestrzeni wektorowej podanej na wykładzie).

3. W zbiorze $\mathbb{R}^2$ określono działania dodawania

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

dla wszystkich $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ oraz mnożenia przez skalar

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, -\alpha y)$$

dla $\alpha \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zbiór $\mathbb{R}^2$ z tak określonymi działaniami **nie jest** przestrzenią wektorową. Następujące aksjomaty przestrzeni wektorowej nie są spełnione (odwołaj się do definicji przestrzeni wektorowej podanej na wykładzie).

4. Rozważmy rzeczywistą przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^3$ wraz ze standardowo określonymi działaniami dodawania wektorów i mnożenia wektora przez skalar. Który z poniższych podzbiorów jest jej podprzestrzenią?

(a) $A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\},$

(d) $A_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = 0\},$

(b) $A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \cdot x_2 = 0\},$

(e) $A_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$

(c) $A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_2 \neq 0\},$

(f) $A_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = 1\}.$

5. Sprawdź, czy podzbiór W jest podprzestrzenią rzeczywistej przestrzeni liniowej V , którą rozważamy wraz ze standardowymi działaniami dodawania wektorów i mnożenia wektora przez skalar, jeżeli

(a) $W = \{(x_1, x_2, x_3, 0) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^4;$

(b) $W = \{(x, y, 2x - 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^3;$

(c) W jest zbiorem macierzy postaci $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, V = M_2(\mathbb{R}).$

6. W żadnym z poniższych przykładów W nie jest podprzestrzenią podanej rzeczywistej przestrzeni liniowej. Podając stosowny kontrprzykład uzasadnij dlaczego.
- (a) W jest zbiorem wszystkich tych wektorów w $\mathbb{R}^3$, które na trzeciej współrzędnej mają 1;
 - (b) W jest zbiorem wszystkich tych wektorów w $\mathbb{R}^2$, których wszystkie współrzędne są liczbami wymiernymi;
 - (c) W jest zbiorem wszystkich tych wektorów w $\mathbb{R}^2$, których wszystkie współrzędne są liczbami całkowitymi;
 - (d) W jest zbiorem wszystkich tych wektorów w $\mathbb{R}^4$, których wszystkie współrzędne są dodatnie;
 - (e) W jest zbiorem wszystkich tych wektorów w $\mathbb{R}^3$, których wszystkie współrzędne są trójkami pitagorejskimi;
 - (f) W jest zbiorem wszystkich tych macierzy w $M_n(\mathbb{R})$, których wyznacznik jest równy 0.
 - (g) W jest zbiorem wszystkich tych macierzy A w $M_n(\mathbb{R})$, dla których $A^2 = A$.
7. Sprawdź, czy wskazany podzbiór jest podprzestrzenią przestrzeni $M_n(\mathbb{R})$ rozważanej ze standardowymi działaniami.
- (a) zbiór macierzy górnych trójkątnych;
 - (b) zbiór macierzy o wyrazach całkowitych;
 - (c) zbiór macierzy osobliwych;
 - (d) zbiór macierzy odwracalnych;
 - (e) zbiór macierzy, których wyrazy sumują się do 0.