Lista 6: Układy równań liniowych.

1. Korzystając ze wzorów Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

(a) $\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 3x + \ \ y = 4 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z - t = 0 \\ 3x - y + 2z - t = 1 \end{cases}$.

2. Stosując wzór Cramera obliczyć niewiadomą y z podanych układów równań liniowych:

(a) $\begin{cases} 3x + 7y + 2z + 4t = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 3y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + 3z + t = 1 \end{cases}$.

3. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ podane układy równań są układami Cramera?

(a) $\begin{cases} (p+1)x - py = 1 \\ 2x + (p-1)y = 3p \end{cases}$, (b) $\begin{cases} px + 3y + pz = 0 \\ -px + 2z = 3 \\ x + 2y + pz = p \end{cases}$.

4. Stosując twierdzenie Kroneckera-Capellego rozwiązać podane układy równań liniowych:

(a) $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 6x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ x + y = -1 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$, (d) $\begin{cases} x - 2y + z + t = 1 \\ x - 2y + z - t = -1 \\ x - 2y + z + 5t = 5 \end{cases}$,

(e) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z + 4t = 2 \\ 6x - 4y + 4z + 3t = 3 \\ 9x - 6y + 3z + 2t = 4 \end{cases}$.

Odpowiedzi: (a) sprzeczny; (b) $x = 1, y = -2$, (c) sprzeczny, (d) $z = 2y - x, t = 1, x, y \in \mathbb{R}$, (e) $z = 6 - 15x + 10y, t = -7 + 18x - 12y, x, y \in \mathbb{R}$.

5. W zależności od parametru a rozwiązać układ równań:

(a) $\begin{cases} 2x + 3y - az = 2 \\ 3x + y + 2z = a \\ ax + 5y - 4z = 3 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 3x - y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 3 \\ 5x - 4y + z = a + 1 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x + y - az = -1 \\ ax + y + az = 4 \\ 4x + y + 4z = a \end{cases}$.

6. Rozwiązać podane układy równań stosując metodę eliminacji Gaussa:

(a) $\begin{cases} x + 6y - z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 6 \\ 3x + 17y = 2 \\ 2x + 13y + 5z = 8 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1 \\ 3x + 6y + 7z + t = 5 \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x - y - 2z + 2t = -2 \\ 5x - 3y - z + t = 3 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = -4 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t - u = 6 \\ 3x + 6y + 5z - 2t - 9u = 1 \\ 2x + 4y + 2z - 8u = -5 \\ 2x + 4y + 7z - 5t + u = 17 \\ x + 2y + 6z - 5t - 10u = 12 \end{cases}$.

Odpowiedzi: (a) $x = -5, y = z = 1$; (b) $x = 11 - 5t - 2y, z = -4 + 2t, y, t \in \mathbb{R}$; (c) układ jest sprzeczny; (d) $x = -4 - 2y - t, z = \frac{7}{2} + t, u = \frac{1}{2}, y, t \in \mathbb{R}$.