

Lista 5: Działania macierzowe. Wyznacznik macierzy. Macierz odwrotna.

1. Obliczyć:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix};$

(c) $\begin{bmatrix} 4+i & 7-i \\ 5-i & 4+i \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 5+i & 1+6i \\ 2+i & 5-9i \end{bmatrix};$

(b) $3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$

(d) $\begin{bmatrix} -i & i \\ -i & 5 \end{bmatrix} + (1-i) \begin{bmatrix} 2+i & i \\ 1+i & 4 \end{bmatrix}.$

2. Wyznacz c_{21}, c_{13} , jeżeli $C = 2A - 3B$,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Wyznacz niewiadome x, y, z w równaniu macierzowym

$$4 \begin{bmatrix} x & y \\ z & -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}.$$

4. Wyznacz niewiadome x, y, z, w w równaniu macierzowym

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} y & w \\ z & x \end{bmatrix}.$$

5. Macierze A, B, C, D, E mają odpowiednio wymiary

$$A : 3 \times 4, \quad B : 3 \times 4, \quad C : 4 \times 2, \quad D : 4 \times 2, \quad E : 4 \times 5.$$

Jeżeli jest zdefiniowana, to określ wymiar macierzy

(a) $A + B$;

(c) $C + E$;

(e) $\frac{1}{2}D$;

(g) $-4A$;

(b) AC ;

(d) BE ;

(f) $E - 2A$;

(h) $2D + C$.

6. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Oblicz iloczyn (jeśli jest to możliwe):

(a) AB ;

(d) BB^T ;

(g) $B^T A$;

(j) $C^T A$;

(b) AC ;

(e) AA^T ;

(h) $B^T B$;

(k) $C^T B$;

(c) A^2 ;

(f) CC^T ;

(i) $B^T C$;

(l) $C^T C$.

7. Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania macierzy oblicz

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 95 & 99 & 98 \\ 97 & 96 & 99 \\ 96 & 99 & 97 \end{bmatrix};$

(b) $\begin{bmatrix} 103 & 97 & 101 \\ 104 & 98 & 100 \\ 103 & 95 & 102 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 999 & 999 & 997 \\ 999 & 999 & 996 \\ 999 & 1000 & 999 \end{bmatrix}.$

8. Obliczyć wyznacznik macierzy:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. Wyznacz x , jeżeli

$$(a) \begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0, \quad (b) \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 0, \quad (c) \begin{vmatrix} x+3 & 1 \\ -4 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Sprawdź, czy zachodzi równość:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y), \quad (b) \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a+b).$$

11. Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć podane wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

12. Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych wyznaczników (powodujące obniżenie ich stopni) obliczyć:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

13. Znaleźć macierze odwrotne do podanych:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

14. Liczby 731, 344, 989 dzielą się przez 43. Uzasadnij, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 9 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

także dzieli się przez 43.

15. Rozwiązać podane równanie macierzowe:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (d) X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}),$$

$$(b) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad (e) X^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = 4X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$