

Lista 4: Liczby zespolone

1. Wskazać taką liczbę x , aby podane pary liczb zespolonych były równe:

(a) $x + 3i, \quad 6 + 3i;$

(c) $(x^2 + 6) + (2x)i, \quad 15 + 6i;$

(b) $(2x - 8) + (x - 1)i, \quad 2 + 4i;$

(d) $(-x + 4) + (x + 1)i, \quad x + 3i.$

2. Wykonaj podane działania:

(a) $(4 + 3i) + (2 - 6i);$

(g) $\frac{1-i}{2+i},$

(b) $(2 + i)^3 + (2 - i)^3,$

(h) $\frac{(\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3})}{(1+i)^2},$

(c) $(4 - 5i) - \overline{(4i - 4)};$

(d) $(1 + i) + \overline{(1 + i)};$

(i) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3},$

(e) $(2 - 3i)(1 + i),$

(f) $(9 - i)\overline{(9 - i)};$

(j) $\frac{3-i}{(2-i)(5+2i)}.$

Uwaga: W zadaniu przyda się znajomość wzorów skróconego mnożenia.

3. Oblicz:

(a) i^n dla $n = 1, 2, 3, 4, 5;$

(b) $i^{57}, i^{1995};$

a następnie znajdź ogólny wzór na i^n dla $n \in \mathbb{N}_+.$

4. Obliczyć wartości podanych wyrażeń:

(a) $(1 + i\sqrt{3})^{150};$

(f) $(2\sqrt{3} - 2i)^{30};$

(b) $(\sqrt{3} + i)^{30};$

(g) $(-\sqrt{2} - \sqrt{2})^{12};$

(c) $(1 + i)^{1000};$

(h) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12};$

(d) $(1 - i)^{12};$

(i) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}.$

(e) $(-i)^{10};$

5. Korzystając z twierdzenia De Moivre'a wyprowadź wzory:

(a) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$

(b) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$

a następnie oblicz $\cos \frac{\pi}{8}.$

6. Obliczyć podane pierwiastki:

(a) $\sqrt[3]{-1+i}$

(d) $\sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}};$

(b) $\sqrt[6]{-64},$

(e) $\sqrt[4]{-\frac{18}{1+\sqrt{3}}}.$

(c) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8};$

(f) $(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ)^{\frac{1}{8}}.$

7. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

- (a) $z^2 = 3 - 4i$,
- (b) $z^2 = 5 - 12i$,
- (c) $z^3 + 8 = 0$,
- (d) $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$,
- (e) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$.
- (f) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.

8. Zobrazować na płaszczyźnie zbiór punktów odpowiadających liczbom zespolonym z spełniającym warunki:

- (a) $|z| = 1$,
- (b) $|z| \leq 2$,
- (c) $|z - 1 - i| < 1$,
- (d) $2 < |z| < 3$,
- (e) $1 \leq |z - 2i| < 2$,
- (f) $\arg z = \frac{\pi}{3}$,
- (g) $\arg z < \frac{\pi}{6}$,
- (h) $\frac{\pi}{4} < \arg(z - 1 + 2i) < \pi$,
- (i) $|\operatorname{Re} z| \leq 1$,
- (j) $-1 < \operatorname{Re} iz < 0$,
- (k) $|\operatorname{Im} z| = 1$,
- (l) $\pi \leq \arg [(-1 + i)z] \leq \frac{3\pi}{2}$,
- (m) $\arg \left(\frac{i}{z}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

9. Niech $u = \frac{z+4}{z-2i}$, $v = \frac{z}{iz+4}$, gdzie $z \in \mathbb{C}$. Naszkicuj zbiór wszystkich liczb zespolonych z , dla których:

- (a) liczba u jest rzeczywista;
- (b) liczba v jest rzeczywista;
- (c) liczba u jest czysto urojona;
- (d) liczba v jest czysto urojona.