Lista 10: Przekształcenia liniowe

(1) Sprawdź, czy podane odwzorowanie jest liniowe.
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, 1)$;
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x^2, y)$;
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$;
(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z + 1)$;
(e) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, T(A) = a+b+c+d$, gdzie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$;
(f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, x - y)$;
(g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (y - x, x + y, 2x)$.

(2) Wiedząc, że $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest odwzorowaniem liniowym i $T(1, 0, 0) = (2, 4, -1), T(0, 1, 0) = (1, 3, -2), T(0, 0, 1) = (0, -2, 2)$ oblicz:
(a) $T(0, 3, -4)$;
(b) $T(2, -4, 1)$;
(c) $T(2, -1, 0)$.

(3) Znajdź jądro i obraz podanego odwzorowania liniowego:
(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x, 0, z)$;
(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, T(x, y, z, w) = (y, x, w, z)$;
(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + 2y, y - x)$;
(d) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}, T(a + bx + cx^2) = a$;
(e) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x], T(a + bx + cx^2) = b + 2cx$;
Czy T jest mono-, epi-, izo- morfizmem?

(4) Znajdź obraz podanego odwzorowania liniowego:
(a) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2, T(ax^2 + bx + c) = (a + b, a + c)$;
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x, y) = (0, x - y, 3y)$;
(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x], T(a, b) = a + ax + ax^2$;
(d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, T(A) = a + d$, gdzie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.