

Lista 3: Grupy permutacji

1. Niech $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ i niech $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Wskazać $\sigma(1)$, $\sigma(5)$, $\tau(1)$, $\tau\sigma(3)$, $\sigma\tau(3)$, $\sigma^{-1}(4)$, $\tau^{-1}(2)$, $\tau^2(4)$.

2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ i niech $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Obliczyć $\tau\sigma$, $\sigma\tau$, $\tau\sigma\tau$, σ^{-1} , $\tau\sigma^{-1}$, $\tau^{-1}\sigma\tau$.

3. Zbudować tabelkę działania w grupie S_3 .

4. Wypisać elementy zbiorów

(a) $A = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(1) = 3\}$;

(c) $C = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(1) = 3 \text{ i } \sigma(2) = 2\}$.

(b) $B = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(2) = 2\}$;

Który ze zbiorów stanowi grupę wraz ze składaniem permutacji?

5. W grupie S_6 rozwiązać równanie:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

6. Zapisać dane cykle ze zbioru S_6 w postaci dwuwierszowej: $(4, 2, 5)$, $(3, 5, 4, 2, 1, 6)$, $(4, 5)$.

7. Wśród poniższych permutacji wskazać cykle i zapisać je w postaci jednowierszowej:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Oblicz:

(a) $(1, 3, 4, 5)(2, 3, 4)$;

(g) $(1, 2, 5, 4)^2(1, 2, 3)(4, 5)$;

(b) $(1, 2)(1, 2, 5, 3)$;

(h) $(1, 2, 3)(4, 5)(1, 2, 5, 4)^{-2}$;

(c) $(1, 4, 3)(2, 3)(2, 4)$;

(i) $(1, 2, 5, 4)^{100}$;

(d) $(1, 4, 2, 3)(3, 4)(5, 6)(1, 3, 2, 4)$;

(j) $(1, 2, 5, 3, 7)^{-1}$;

(e) $(1, 2, 5, 4)(1, 3)(2, 5)^2$;

(k) $(1, 2)^{-1}$;

(f) $(1, 2, 5, 4)^{-1}(1, 2, 3)(4, 5)(1, 2, 5, 4)$;

(l) $[(1, 2)(3, 4)(1, 2)(4, 7)]^{-1}$.

9. Znajdź $(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1}$.

10. Daną permutację przedstawić w postaci iloczynu cykli rozłącznych:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 2 & 7 & 6 & 8 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 6 & 9 & 5 & 4 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 9 & 3 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 & 2 & 8 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

11. Daną permutację przedstawić w postaci iloczynu transpozycji i stwierdzić, czy permutacja jest parzysta czy nieparzysta:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 6 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 4 & 2 & 8 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 5 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 3 & 8 & 7 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 2 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

12. Niech σ będzie permutacją liter alfabetu od A do Z, która przenosi literę na znajdującą się bezpośrednio pod nią w zapisie

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L & M & N & O & P & Q & R & S & T & U & V & W & X & Y & Z \\ H & D & B & G & J & E & C & M & I & L & O & N & P & F & K & R & U & S & A & W & Q & T & V & Z & X & Y \end{array}.$$

Zapisz permutację σ jako iloczyn cykli.