

Lista 2: Grupa

1. Zbadać, czy $(A_i, +)$ jest grupą, jeżeli:

(a) $A_1 = \mathbb{N}$,

(b) $A_2 = \mathbb{Q}$,

(c) $A_3 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

(d) $A_4 = \mathbb{R}$,

(e) $A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

(f) $A_6 = \{0\}$.

2. Zbadać, czy $(A_i, \cdot)$ jest grupą, jeżeli:

(a) $A_1 = \mathbb{R}$,

(b) $A_2 = \mathbb{R}_+$,

(c) $A_3 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(d) $A_4 = \{1\}$,

(e) $A_5 = \{1, -1\}$,

(f) $A_6 = \{-1, 0, 1\}$,

(g) $A_7 = \mathbb{N}$;

(h) $A_8 = \mathbb{Z}$.

3. Niech dany będzie zbiór dwuelementowy $G = \{a, b\}$. W zbiorze G definiujemy działanie $*$ w następujący sposób:

$$a * a = b * b = a, a * b = b * a = b.$$

Wykazać, że $(G, *)$ jest grupą przemenną.

4. Podaj przykład takiego działania wewnętrznego $*$ w zbiorze $G = \{a, b\}$, aby para $(G, *)$

(a) stanowiła grupę;

(b) **nie** stanowiła grupy.

Uwaga: Działanie w podpunkcie (a) ma być inne niż to podane w zadaniu poprzednim. Ile różnych działań wewnętrznych można zdefiniować w zbiorze G ?

5. Uzupełnij poniższą tabelę zakładając, że jest ona tabelą działania dla grupy.

	e	a	b	c	d
e	e				
a		b			e
b		c	d	e	
c		d		a	b
d					

Wskazówka: Zastanów się, czy dla takiego grupowego działania elementy w jednym wierszu, jednej kolumnie mogą się powtarzać.

6. W zbiorze $\mathbb{Z}$ określamy działanie $*$ w następujący sposób:

$$a * b = a + b + 2.$$

Czy zbiór $\mathbb{Z}$ tworzy grupę wraz z działaniem $*$?

7. W zbiorze $\mathbb{R}^+$ określamy działanie $\circ$ za pomocą reguły $a \circ b = \frac{ab}{a+b}$. Sprawdzić, czy para $(\mathbb{R}^+, \circ)$ tworzy grupę.

8. W zbiorze $\mathbb{R}$ określono działanie $\oplus$ wzorem $a \oplus b = a + b + ab$. Czy para $(\mathbb{R}, \oplus)$ stanowi grupę?
9. Czy para $(G, \circ)$ z zadania 8, lista zadań 1 tworzy grupę?
10. W zbiorze $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ określamy działanie $\circ$ wzorem

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc^2 + ad).$$

Pokazać, że $(X, \circ)$ jest grupą.