

Lista 1: Działania wewnętrzne i ich własności

1. W poniższej tabelce, za pomocą znaków $+$ i $-$, zaznaczono, że odejmowanie liczb jest działaniem wewnętrznym w zbiorze $\mathbb{Z}$, ale nie jest działaniem wewnętrznym w zbiorze $\mathbb{N}$. Uzupełnić tabelkę.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$+$								
$-$	$-$	$+$						
$\cdot$								
$:$								

Objaśnienie oznaczeń stosowanych w tabeli:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Która z poniższych operacji jest działaniem wewnętrznym w podanym zbiorze?

- (a) dodawanie mod 16 w zbiorze $\{0, 4, 8, 12\}$; (c) mnożenie mod 15 w zbiorze $\{1, 4, 7, 13\}$;
 (b) dodawanie mod 15 w zbiorze $\{0, 4, 8, 12\}$; (d) mnożenie mod 9 w zbiorze $\{1, 4, 5, 7\}$.

3. W których spośród wskazanych poniżej zbiorów, wzór

$$a \circ b = a^2 - b^2$$

określa działanie wewnętrzne?

- (a) $\mathbb{Z}$; (d) $\{-1, 1\}$;
 (b) $\mathbb{N}$; (e) $\{0, 1\}$;
 (c) $\{-1, 0, 1\}$; (f) $\{0\}$

4. W zbiorze $\mathbb{R}$ określamy działanie wewnętrzne $\circ$ za pomocą wzoru:

$$a \circ b = b.$$

Pokazać, że to działanie jest łączne. Czy jest ono przemienne?

5. W zbiorze $\mathbb{Z}$ określamy działanie wewnętrzne $\circ$

$$a \circ b = a^2 + b - 1.$$

Zbadać, czy to działanie jest przemienne, łączne.

6. W zbiorze $\mathbb{Q}$ definiujemy działanie wewnętrzne $*$ wzorem $a * b = \frac{a+b}{2}$. Sprawdzić, czy to działanie $*$ jest przemienne, łączne. Czy tak zdefiniowana operacja jest działaniem wewnętrznym również w zbiorze $\mathbb{N}$?

7. Sprawdzić, że wzór $a * b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ określa działanie wewnętrzne w zbiorze $\mathbb{R}^*$. Zbadać, czy działanie to jest przemienne, łączne.

8. Niech $D := \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ i niech dla $i = 1, \dots, 6$ funkcje $f_i : D \rightarrow D$ będą określone wzorami:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{-x-1}{x}, f_3(x) = \frac{-1}{x+1},$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x}, f_5(x) = \frac{-x}{x+1}, f_6(x) = -x-1.$$

Sprawdzić, że składanie funkcji $\circ$ jest działaniem wewnętrznym w zbiorze $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$.