

ZADANIA Z PRZESTRZENI METRYCZNYCH

- Zadanie 1 - norma L^∞ na $\mathbb{R}^n$

a) Sprawdź, że wzór

$$d(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

poprawnie określa metrykę na $X = \mathbb{R}^n$.

b) Dla $n = 2$ ($X = \mathbb{R}^2$) opisz kule

$$K(a, r) := \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

oraz odcinki

$$[a, b] := \{x \in X : d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\}$$

względem tej metryki.

- Zadanie 2 - norma L^1 na $\mathbb{R}^n$

Mając daną inną metrykę:

$$d(x, y) := |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

wykonaj polecenia z zadania 1.

- Zadanie 3 - domkniętość przedziału

Udowodnij następujący:

Lemat 1. Dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) przedział

$$[a, b] := \{x \in X : d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\}$$

jest zbiorem domkniętym względem topologii indukowanej przez metrykę d .

- Zadanie 4 - sprawdzanie warunku metryki

a) Sprawdź, czy funkcja określona wzorem:

$$d(x, y) := \begin{cases} |x - y| & \text{gdy } xy \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + xy + y^2} & \text{gdy } xy < 0 \end{cases}$$

określa metrykę na $X = \mathbb{R}$.

b) Znajdź opis kul względem tej metryki.

- Zadanie 5 - przestrzeń niezupełna i jej uzupełnienie

a) Niech $X := K(0, 1) := \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\} \subset \mathbb{C}$ oraz określmy d następująco:

$$d(x, y) := \min(|x - y|, 2 - |x| - |y|)$$

Sprawdzić, że (X, d) jest przestrzenią metryczną niezupełną.

b) Niech $\widetilde{X} := X \cup \{1\}$ oraz określając $\widetilde{d}$ jako:

$$\widetilde{d}(x, y) := d(x, y), \quad x, y \in X$$

$$\widetilde{d}(x, 1) = 1 - |x|$$

otrzymujemy uzupełnienie przestrzeni X .

- Zadanie 6 - metryka rzymska

a) Niech $X = \mathbb{R}^2$ oraz

$$d(x, y) := \begin{cases} |x| + |y| & \text{gdy } x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0 \\ |x - y| & \text{gdy } x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \end{cases}$$

Sprawdź, że d jest metryką na X .

b) Narysuj przykłady kul i odcinków w tej metryce.