

**Zadania z Algebry B (warunek). Seria 1, 09.10.2007**

1. Rozwiązać równanie:

- (a)  $z^6 = (\bar{z} + 1)^6$ ;
- (b)  $\left(\frac{1-\bar{z}}{1+z}\right)^{2003} = 1$ ;
- (c)  $z^3 + 4i|z| = 0$ ;
- (d)  $z^2 - 12\bar{z} + 61 = 0$ .

2. Opisać geometrycznie i narysować zbiór:

- (a)  $\{z \in \mathbf{C} \mid \left|\frac{z-1}{2z+1}\right| < 1\}$ ;
- (b)  $\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \arg\frac{z+i}{z-i} < \frac{\pi}{4}\}$ ;
- (c)  $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}\frac{2z-1}{z^2-z} > 0\}$ ;
- (d)  $\{z \in \mathbf{C} \mid z = \frac{1+2i}{1+ti}, t \in \mathbf{R}\}$ .

3. Dowieść, że:

- (a)  $\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\phi = \frac{\sin 2n\phi}{2\sin \phi}$ , jeśli  $\phi \neq 0$ ;
- (b)  $\sum_{k=1}^n \sin^2 k\phi = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)\phi \sin n\phi}{2\sin \phi}$ , jeśli  $\phi \neq 0$ ;
- (c)  $\cos 8^\circ + \cos 16^\circ + \cos 24^\circ + \dots + \cos 176^\circ = -\frac{1}{2}$ ;
- (d)  $\sin^2 4^\circ + \sin^2 8^\circ + \sin^2 12^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ = \frac{45}{4}$ .

4. Rozwiązać równanie, posługując się metodą Cardana:

- (a)  $z^3 - 6z + 4 = 0$ ;
- (b)  $z^3 - 6z^2 - 4 = 0$ ;
- (c)  $z^3 + (3+3i)z + 2+i = 0$ ;
- (d)  $z^3 - 3\sqrt[3]{2}z + 2 = 0$ ;
- (e)  $z^3 + 6iz + 4 + 4i = 0$ ;
- (f)  $z^3 - 3z^2 + 1 = 0$ .

5. Obliczyć:  $\sqrt[3]{2-\sqrt{2}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$ .