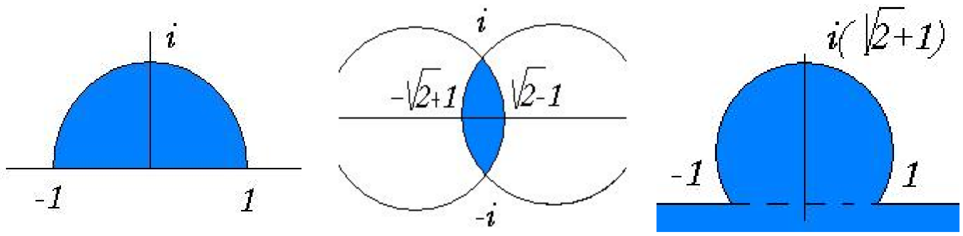
Zadania koła naukowego "Mat-ołki", Seria 2, listopad 2011

1. Udowodnij, że homografia $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ przeprowadza każdy okrąg uogólniony na okrąg uogólniony (okrąg uogólniony = okrąg lub prosta).

2. Znajdź obraz zbioru D narysowanego poniżej za pomocą homografii a) $f(z) = (z + 1)/(z - 1)$; b) $f(z) = (z + i)/(z - i)$.



3. Oblicz promień zbieżności szeregów potęgowych:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n\, z^n$;

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}}\right)^n z^n$;

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} z^n$.

4. Udowodnij, że dla $q \in \mathbb{C}$ takich, że $|q| < 1$ mamy

$$\frac{1}{(1-q)^2} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots .$$

   Wyprowadź stąd wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

5. Oblicz sumę szeregu

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

6. Oblicz

(a) $\sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n, \ |z| > |b|$;

(b) $\sum_{n=-\infty}^{-1} (n+1) b^{-n-2} z^n$;

(c) $\sum_{n=-\infty}^{-1} (b-a)^{-n-1} (z-a)^n, \ a \neq b, \ |z-a| > |z-b|$.