Kraków, 29.03.2012

Prof. dr hab. Władimir Mitiuszew

Katedra Informatyki i Metod Komputerowych

Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Recenzja rozprawy doktorskiej

Przedmiotem niniejszej recenzji jest rozprawa doktorska Pana magistra Krzysztofa Żyjewskiego, zatytułowana *„Nielokalne zagadnienie Robina dla równań eliptycznych drugiego rzędu w obszarze płaskim z punktem kątowym na brzegu"*. Przewód doktorski jest prowadzony na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie. Recenzja została napisana na podstawie zlecenia i pisma WMiI.6350.1.2012 z dnia 01.03.2012.

Rozważana rozprawa doktorska dotyczy asymptotycznych badań zagadnień brzegowych nielokalnych dla ogólnych równań eliptycznych w obszarach z punktem kątowym na brzegu. Wielu naukowców światowych jednostek naukowych prowadzi szerokie badania tego zagadnienia. Miedzy innymi badane są istnienie i jednoznaczność rozwiązań w odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych typu przestrzeni Sobolewa. Odpowiedni przegląd podstawowych wyników został szczegółowo opisany w rozprawie i jest przedstawiony w literaturze. Rozpatrywane zagadnienia są bardzo ważne dla zastosowań w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych i w teoretycznych podstawach zastosowań metody elementów skończonych. W zagadnieniach mechaniki, zwykle w otoczeniu punktów kątowych brzegu, powstają osobliwości badanych pól fizycznych, na przykład, koncentracja naprężeń, nieograniczony strumień cieplny lub lokalna prędkość cieczy itd. Fizyczne pole dominuje w otoczeniu punktów kątowych i wobec tego badanie pola w tych otoczeniach jest podstawą opisu rozważanego zjawiska fizycznego. Z drugiej strony, metoda elementów skończonych i inne metody numeryczne nie mogą być wprost stosowane do takich zagadnień. Rozpatrzmy na przykład element skończony kształtu trójkątnego, odpowiadający dyskretyzacji obszaru z dwoma bokami na brzegu obszaru i trzecim bokiem, przylegającym do innych elementów skończonych. Z teoretycznych badań wiadomo, że nie istnieją możliwości lokalnego badania tego elementu trójkątnego, w tym jednostajnej aproksymacji pola w otoczeniu wierzchołka. Stąd bez dokładnych analitycznych asymptotycznych badań nie ma możliwości oszacowania rozwiązania.

Uważam, że rozprawa doktorska Pana magistra Krzysztofa Żyjewskiego mieści się w aktualnym kierunku badań o istotnym znaczeniu aplikacyjnym, jakim jest badanie zagadnień brzegowych nielokalnych w obszarze z punktem kątowym, w zakresie teoretycznych podstaw modelowania pól fizycznych w obszarach z punktami osobliwymi.

Celem rozprawy doktorskiej było rozszerzenie i uogólnienie metod prof. W. Kondratiewa i prof. M. Borsuka dla zagadnień brzegowych (lokalnych) na zagadnienia nielokalne, gdy wartości szukanej funkcji na brzegu są związane z wartościami tej funkcji wewnątrz obszaru. Przy czym operator przesunięcia w obszar posiada punkt stały, który się pokrywa z wierzchołkiem kątu. W pracy rozważony został najtrudniejszy rodzaj zagadnień nielokalnych, tj. przypadek, w którym nośnik nielokalnego składnika przecina brzeg obszaru.

Rozdziały pierwszy i drugi mają charakter wstępu, gdzie autor rozprawy opisał rozważane zagadnienia i zaprezentował historię podjętej tematyki z punktu widzenia czystej matematyki. W rozdziale drugim zostały wprowadzone oznaczenia, wykorzystywane w pracy, w tym szczegółowo opisane obszary i przestrzeni funkcyjne.

W rozdziale trzecim autor opisał nieliniowe zagadnienie na wartości własne (QEVP) i jego bardzo ważny przypadek (EVP), gdy równanie jest liniowym. W tym przypadku samo równanie sprowadza się do prostego równania różniczkowego rzędu drugiego, podstawowymi rozwiązaniami którego są funkcje *sin* i *cos*. Do standardowych warunków brzegowych na końcach przedziału $(-\omega/2, \omega/2)$ jest dodany wyraz $b\psi(0)$, który właśnie jest przesunięciem wewnątrz obszaru. Wykorzystując standardową technikę przyrównywania do zera odpowiedniego wyznacznika autor otrzymuje wartości i funkcje własne. Wartości własne spełniają transcendentalne równanie liczbowe. Od następnego podrozdziału 3.2 zaczyna się nietrywialne badanie asymptotyczne nieliniowego zagadnienia *(QEVP)*, gdzie autor udowadnia nierówność typu Friedrichsa-Wirtingera $(W)_m$ w przypadku zagadnienia nielokalnego. W odróżnieniu od klasycznej nierówności tutaj występuje składnik ze współczynnikiem proporcjonalności $b\psi(0)$, który powstał także w zagadnieniu liniowym (EVP). Warto podkreślić, że w lewej stronie nierówności $(W)_m$ występuje wartość własna θ i jest udowodnione, że ta stała jest optymalna, tzn. nie można jej zwiększyć. Nierówność $(W)_m$, włączając przypadek $(W)_2$ na str. 16, jest podstawową nierównością na wartości i funkcje własne, wykorzystywane w dalszej części pracy. Ale również te nierówności są przydatne w innych dziedzinach matematyki i jej zastosowań między innymi w izoperymetrycznych zagadnieniach (patrz *„Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics"*, G.Polya i G.Szegö), teorii oscylacji powłok i membran (patrz I. V. Andrianov, L. I. Manevitch *„Asymptotology: Ideas, Methods, Results"*, Moscow, Aslan, 1994) oraz zagadnieniach na konfiguracjach (patrz V. V. Mityushev, S. V. Rogosin *„Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications"*, Chapman & Hall / CRC, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Boca Raton etc, 2000). Dalej w tym rozdziale są udowodnione inne nierówności typu Hardy'ego-Friedrichsa-Wirtingera, zawierające biegunową współrzędną r.

W rozdziale czwartym autor bada słabe rozwiązania liniowego zagadnienia Robina *(L)*. Współczynniki równania i warunków brzegowych spełniają pewne założenia, które mają charakter naturalny, i w sumie są bardzo słabymi założeniami w porównaniu z założeniami innych matematyków. Stosując technikę funkcji barierowej i uzyskane wcześniej nierówności, autor udowadnia oszacowanie lokalne na wartość szukanej funkcji przez funkcję potęgową w założeniu wypukłego obszaru. Wykładnik tej funkcji nie jest znany na początku. Dalej autor otrzymuje globalne oszacowanie wagowej całki Dirichleta i określa optymalny wykładnik potęgi. W rezultacie powstają ważne oszacowania (4.1.2) rozwiązania zagadnienia. Tutaj warto podkreślić, że w odróżnieniu od poprzedników to oszacowanie i inne wyniki są udowodnione przy założeniu, że główne współczynniki równania spełniają warunek ciągłości względem Diniego. Przy czym pozostały współczynniki równania eliptycznego nie są ograniczone. Jest to poważne osiągnięcie, które powinno zrobić wrażenie na matematykach, zajmujących się tymi zagadnieniami. Występowanie wartości własnej w wykładnikach nierówności (4.1.2) jest rzeczą naturalną, ale to, że nierówność ma miejsce przy takich ogólnych założeniach, jest dla mnie pewnym zaskoczeniem. W tym rozdziale autor także sprawdza przypadek $b = 0$, gdy zagadnienie nielokalne przechodzi do zbadanego wcześniej przez prof. M.Borsuka zagadnienia lokalnego. Pokazano, że ten przypadek pokrywa się ze znanymi wynikami. Jest to proste sprawdzenie, ważne dla weryfikacji własnych wyników, co odpowiada dobrym praktykom prac matematycznych, gdy własne wyniki są szczegółowo zbadane z poprzednimi szczegółowymi wynikami. W podrozdziale 4.8 autor podaje przykład, z którego wynika, że założenie warunku Diniego na starszy współczynniki jest istotne. Ten przykład jest bardzo ważnym, bowiem pokazuje, że dla bardziej słabych założeń twierdzenia rozdziału nie są słuszne. Jest to w pewnym sensie ostateczne rozwiązanie problemu założeń na współczynniki, co było poważnym upustem poprzednich badaczy. Warto także podkreślić, że tutaj autor wykorzystuje inne metody, które są różne od powszechnie uznanych metod stosowanych przez A.Skubaczewskiego.

W piątym rozdziale autor rozpatruje *nieliniowe* zagadnienie Robina, dotychczas przez nikogo nie badanych. Nieliniowość występuję w potęgach szukanej funkcji *u* i jej gradientu w równaniu oraz w brzegowych nielokalnych warunkach w postaci funkcji $g(x,u)$. Jak i w przypadku liniowym, autor wprowadza naturalne założenia na współczynniki i znane funkcji (na przykład na funkcję $g(x,u)$). Schemat badania jest podobny do przypadku liniowego. W podrozdziale 5.2 udowodniono zasadę maksimum, w tym celu autor zastosował metody De Giorgi i Stampacchia podczas szacowania modułu słabych rozwiązań zagadnienia nieliniowego. W podrozdziale 5.3 za pomocą iteracyjnej metody Mosera udowodniono lokalne oszacowanie w pobliżu punktu kątowego zagadnienia *(QL)*. Obecnośc nielokalnego składnika w rozważanych zagadnieniach wymagało od dysertanta dużego wysiłku i pomysłu dla rozszerzenia powyższych metod. Idea otrzymania ścisłych oszacowań rozwiązań opiera się na wyprowadzeniu globalnych i lokalnych oszacowań całkowych rozwiązania w wagowych przestrzeniach Sobolewa-Kondratiewa i zastosowaniu nierówności typu Poincaré'ego – Friedrichsa – Wirtingera z dokładną stałą oszacowania.

Rozprawę kończy rozdział szósty, w którym autor rozpatruje zagadnienie brzegowe nielokalne dla słabo nieliniowego równania eliptycznego *(WQL)*. Ogólny schemat badania pokrywa się z poprzednim rozdziałem. W tym przypadku pokazano, że lokalne rozwiązania mają taką samą oszacowanie, jak i liniowe zagadnienie *(L)*. Osobne badanie tego równania jest uzasadnione właśnie tym uzyskanym faktem, że lokalne rozwiązanie zachowuje się tak samo, jak i rozwiązanie liniowego zagadnienia.

Do rozprawy jest dołączony dodatek zawierający rozmaite nierówności oraz twierdzenia Sobolewa o włożeniach.

Bibliografia rozprawy liczy 82 pozycji.

Wszystkie wyniki pracy są poprawne. Nie znalazłem w niej żadnych istotnych uchybień, natomiast mam kilka ogólnych uwag krytycznych.

1. Literatura jest dobrze opisana tylko pod jednym względem dotyczącym prac związanych z artykułami A.Skubaczewskiego [64, 67, 68, 40, 39, 70, 44] i jego cytowaniami. Zbyt mocno powiedziano, że A.Skubaczewski pierwszy utworzył teorię nielokalnych zagadnień (str. 5). Brak natomiast innych matematycznych prac Yakubovicha i innych, oraz nie ma w ogóle odwołania do licznych prac z zastosowaniami, gdzie rozważane są zagadnienia z kawałkami stałymi współczynnikami. Warto było by powiedzieć krótko o zastosowaniach (pracy Adlera, Berlaynda, Kolpakova, Linkova), ponieważ autor akurat takie zagadnienia i rozpatruje, co podniosło by atrakcyjność rozprawy. Na str. 4 wspomniane są prace Karlovicha i Muskhelishviliego w związku z funkcjami zespolonymi. Zamiast nich trzeba było by wymienić Litvinchuka. Wspomnienie o Carlemanie jest tutaj stosowne.
2. Nie ma chociażby wskazówek, co się zmieni, jeśli przesunięcie traci symetrię, na przykład, co się zmieni w zagadnieniu *(EVP)*, jeżeli $b\psi(0)$ zamienić na $b\psi(p)$, gdzie $p > 0$.

3. Opis nie zawiera wykorzystywanych przestrzeni oraz przesunięcia γ.
4. W niektórych miejscach (na przykład w rozdziale 4, str. 35 , tw. 4.3 i inne) nie ma spójności, tzn. warto było by napisać, że dowód przedstawionego twierdzenia będzie podany później i podać na jakiej stronie.

Podane powyżej uwagi krytyczne nie pomniejszają wartości pracy.

Uważam, że praca jest merytorycznie poprawna, zawiera nowe i wartościowe wyniki naukowe związane z jednym z podstawowych matematycznych pytań, w jakim stopniu badania liniowych zagadnień można uogólnić na nieliniowe, na ile lokalne osobliwości mają wpływ na globalne rozwiązania. Stanowi ona oryginalne rozwiązanie problemu naukowego z zakresu teorii zagadnień brzegowych nielokalnych dla ogólnych równań eliptycznych w obszarach z punktem kątowym na brzegu. Autor wykazuje się w niej dużą wiedzą teoretyczną z badanej dziedziny oraz umiejętnością prowadzenia badań naukowych. Podsumowując, uważam, że recenzowana rozprawa doktorska spełnia warunki ustawowe i zasługuje na wyróżnienie. Tym samym wnoszę o dopuszczenie magistra Krzysztofa Żyjewskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.