Zagadnienie z ukośną pochodną dla równań eliptycznych drugiego rzędu w obszarze z punktem stożkowym na brzegu

Mariusz Bodzioch

STRESZCZENIE

Liniowe równania eliptyczne drugiego rzędu w obszarach gładkich badane były od pierwszej połowy dwudziestego wieku. Prace Girauda i Schaudera z lat trzydziestych pokazały, że przy założeniu odpowiedniej gładkości współczynników równania i brzegu obszaru, podstawowe zagadnienia brzegowe są rozwiązywalne. Artykuł Friedrichsa z 1934 roku spowodował, że problemy te zaczęły być interpretowane z punktu widzenia analizy funkcjonalnej. Prace De Griorgi z 1957 roku i Nasha z 1958 roku rozpoczęły nowy etap w badaniu wielowymiarowych równań liniowych. Kulminacją tego etapu były prace Stampacchia (1960), Morreya (1959) oraz Ladyzhenskaya i Ural'tsevy (1964). Ich prace zainspirowały wielu innych matematyków.

Zagadnienia, w których warunek brzegowy ma postać $b(x, u, Du) = 0$, gdzie b zależy od gradientu Du nieznanej funkcji u w określony sposób, nazywane są zagadnieniami z ukośną pochodną. Warto zauważyć, że istnieje zasadnicza różnica w podejściu większości badaczy do zagadnienia z ukośną pochodną a podejściu do zagadnienia Dirichleta. Ladyzhenskaya i Ural'tseva w monografii poświęciły dziewięć rozdziałów zagadnieniu Dirichleta i tylko jeden rozdział „innym warunkom brzegowym". Gilbarg i Trudinger w swojej książce na zagadnienie z ukośną pochodną przeznaczyli jedynie kilka stron. Pewne uporządkowanie istniejącej teorii na temat zagadnień z ukośną pochodną zostało zawarte w książce Liebermana z 2013 roku. Niestety, w przeciwieństwie do zagadnienia Dirichleta, teoria dla zagadnień z ukośną pochodną nie jest jeszcze w stanie kompletnym.

Należy jeszcze zauważyć, że badania w wymienionych pracach odnoszą się do zagadnień brzegowych w wystarczająco gładkich obszarach. Jednak wiele problemów fizyki i techniki prowadzi do konieczności rozważania zagadnień brzegowych w obszarach z niegładkim brzegiem, w szczególności, w obszarach, które mają skończoną liczbę punktów kątowych ($n = 2$) lub stożkowych ($n \geq 3$) na brzegu. Teoria zagadnień brzegowych w niegładkich obszarach została opisana w znanej książce Kondratiewa i Oleinika (1983), jak również w pracach Kufnera i Sändiga (1987) oraz w monografii Maz'ya i in. (1984, 1997).

Pionierskimi i fundamentalnymi pracami poświęconymi ogólnym liniowym zagadnieniom brzegowym w obszarach z punktami kątowymi i stożkowymi były prace Kondratiewa (1963, 1967), Birmana i Skvortsova (1962), Eskina (1963, 1985), Lopatinskiy'ego (1963) oraz Maz'ya (1963,

1966, 1967). Prace te są związane z rozwiązywalnością oraz regularnością rozwiązań ogólnych równań liniowych eliptycznego typu w wagowych przestrzeniach Sobolewa-Kondratiewa, w obszarach niegładkich z założeniem odpowiedniej gładkości współczynników równań. Warto zwrócić uwagę na fakt, że metody stosowane do analizy zagadnień w gładkich obszarach nie mogą być stosowane do analizy problemów w obszarach niegładkich.

Niniejsza rozprawa poświęcona jest badaniu zachowania się silnych rozwiązań zagadnienia z ukośną pochodną dla eliptycznych równań w pobliżu brzegowego punktu stożkowego. Głównym celem jest otrzymanie dokładnego wykładnika malenia rozwiązań przy minimalnych możliwych założeniach. Teoria zagadnień z ukośną pochodną odgrywa ważną rolę w badaniach przepływów transonicznych oraz w teorii zagadnień kapilarnych. Opis tej teorii, znanej od 1986 roku, można znaleźć w pracy Finn'a z 1986 roku. W naukach o materiałach konstrukcyjnych, punkty osobliwe odpowiadają własnościom materiałów w pobliżu pęknięć lub szczelin. Inne zastosowania zagadnień brzegowych, zarówno liniowych jak i nieliniowych, w teorii materiałów kompozytowych o skończonej liczbie inkluzji, można znaleźć w monografii Mityusheva i Rogosina z 1999 roku. W geodezji i geofizyce niektóre z najbardziej podstawowych problemów określania pola grawitacyjnego z obserwacji brzegowych są przeliczane na zewnętrzne zagadnienia brzegowe dla równań Laplacea i Poissona.

W rozprawie badane są silne rozwiązania zagadnienia z ukośną pochodną dla niedywergencyjnych równań eliptycznych drugiego rzędu: liniowego, semiliniowego i quasiliniowego w n-wymiarowym obszarze ograniczonym z punktem stożkowym na brzegu. Otrzymane zostały oszacowania rozwiązań w wagowych przestrzeniach Sobolewa-Kondraiewa oraz oszacowania typu $u(x) = O(|x|^{\alpha})$ z dokładnym wykładnikiem α.

Wyprowadzona została również nowa nierówność typu Friedrichsa-Wirtingera zaadaptowana do liniowego zagadnienia z dokładną stałą szacującą oraz wyprowadzone zostały pewne pomocnicze całkowo-różniczkowe nierówności. Wyprowadzone zostały lokalne i globalne oszacowania rozwiązań i znaleziony został najlepszy wykładnik ciągłości modułów rozwiązań w pobliżu punktu stożkowego. Nowym podejściem pracy było rozważanie oszacowań rozwiązań rozważanych zagadnień przy minimalnych założeniach na gładkość współczynników. Uzyskane zostały pewne oszacowania w sytuacjach, gdy współczynniki równań nie spełniają nawet warunku Diniego ciągłości. W pracy udowodniono również twierdzenie o istnieniu najmniejszej wartości własnej zagadnienia na wartości własne dla operatora Laplacea-Beltramiego na sferze jednostkowej. Uzyskano również oszacowanie tej wartości.

Otrzymane rezultaty stanowią rozszerzenie rezultatów uzyskanych przez Borsuka i Kondratiewa oraz wcześniejszych rezultatów autora (*Electronic Journal of Differential Equations*, 2012). Częściowe rezultaty rozprawy zostały opublikowane w trzech artykułach: dwóch w *Complex Variables and Elliptic Equations* (2014, 2015) oraz jednego w *Current Trends in Analysis and Its Applications, Trends in Mathematics* (2015).

W rozprawie zastosowane zostały metody Borsuka-Kondratiwewa, w tym metoda pierścieni Kondratiewa, zaadaptowane do zagadnienia z ukośną pochodną w niegładkim obszarze. Wykorzystane zostały również twierdzenia Sobolewa o zanurzeniu, L^p-oszacowania, zasady maksimum, zasady porównawcze, jak również metoda funkcji barierowej. W dowodzie twierdzenia o istnieniu najmniejszej wartości własnej zastosowane zostały funkcje kuliste Legendre'a , funkcje Gegenbauer'a oraz pewne ich własności. W celu uzyskania oszacowania najmniejszej wartości własnej, użyta została zasada porównawcza Chaplygin'a.