

dr hab. Robert Stańczy
Zakład Równań Różniczkowych
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
adres: pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław
tel. 071 375 74 13, fax 071 375 74 29
e-mail: Robert.Stanczy@math.uni.wroc.pl

Wrocław, 5 czerwca 2013 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Damiana Wiśniewskiego zatytułowanej
Boundary value problems for elliptic second order equations
in unbounded cone-like domains

Rozprawa składa się z siedmiu rozdziałów i bibliografii. Pokróćce omówię kolejne jej części. Wstęp zawiera przegląd literatury dotyczącej omawianych zagadnień, motywacje fizyczne oraz wprowadzenie rozpatrywanych w rozprawie zagadnień brzegowych, a także omówienie układu pracy. Rozdział dotyczący pojęć wstępnych to kompletny i dokładny spis używanych przez doktoranta symboli oraz przestrzeni funkcyjnych, a także przedstawienie notacji używanej dla oznaczania operatorów. W rozdziale omawiającym zagadnienie na wartości i funkcje własne zbadano własności operatora m -Laplace'a-Bertramiego na sferze. Udowodniono także nierówności całkowo-różniczkowe typu Friedrichsa-Wirtingera i Hardy'ego-Friedrichsa-Wirtingera wykorzystywane w dalszej części rozprawy do oszacowań a priori rozwiązań rozważanych zagadnień brzegowych. Kolejny rozdział poświęcony jest zagadnieniom liniowym i oszacowaniom a priori rozwiązań. Sformułowano także optymalne warunki ciągłości Diniego do badania asymptotyki rozwiązań, co zobrazowano przykładami. Dwa kolejne rozdziały dotyczą zagadnień kwaziliniowych, pierwszy w sformułowaniu dotyczącym rozwiązań słabych, a kolejny klasycznych rozwiązań gładkich równania

$$-\nabla \cdot a(x, u, \nabla u) + b(x, u, \nabla u) = 0,$$

gdzie funkcja a opisana jest asymptotycznie, dla dużych $|x|$, wzorem $|u|^q |\nabla u|^{m-2} \nabla u$.
Badana jest asymptotyka rozwiązań u znikających w nieskończoności oraz spełniających

odpowiedni warunek brzegowy na brzegu nieograniczonego zbioru stożkowego, w którym zachodzi powyższe równanie. Przypadek równania liniowego i słabo-kwaziliniowego zilustrowany jest przykładem. Dodatek zawiera wykorzystywane w rozprawie nierówności oraz wersję nierówności Gronwalla.

Pod względem redakcyjnym praca jest napisana dość przejrzysto i czytelnie, jedynie odnośniki do literatury czasem nie odpowiadają właściwym pozycjom. Nazwiska autorów pojawiające się przy cytowanych pracach i monografiach pozwalają, mimo nieodpowiednich odnośników, odnaleźć odpowiednie pozycje literatury, do których odnosi się autor rozprawy.

Głównym wynikiem rozprawy są oszacowania a priori dla rozwiązań omawianych zagadnień, niewątpliwie ważne i kluczowe w teorii egzystencjalnej, jednakże autor nie formułuje żadnych twierdzeń o istnieniu rozwiązań, a jedynie ilustruje przedstawianą teorię licznymi przykładami. W mojej ocenie praca byłaby bardziej kompletna gdyby zawierała sformułowanie kilku twierdzeń o istnieniu rozwiązań choćby w przypadku najprostszycych równań o rozdzielonych zmiennych i wskazaniu jakie są zależności wykładnika nieliniowości, szybkości wygaszania przestrzennego czy też szybkości znikania rozwiązań w nieskończoności. Jedynie we wstępie pojawiają się wzmianki o twierdzeniach o istnieniu dla szczególnych postaci równań, a w przypadku liniowym i słabo-kwaziliniowym pojawiają się przykłady. Trzeba jednak w tym miejscu podkreślić, że oszacowania rozwiązań i analiza zagadnień nieliniowych to bieżące zagadnienia rozpatrywane w teorii równań cząstkowych. Autor wykazał się znajomością dość wyrafinowanych metod w badaniu równań cząstkowych takich jak metoda energetyczna, zasada maksimum, iteracyjna metoda Mosera, metoda pierścieni Kondratiewa, teoria operatorów różniczkowych na rozmaitościach czy też techniki analizy asymptotycznej zapożyczone z analizy zespolonej typu Phragmena-Lindelöfa. Mimo, że rozpatrywane zagadnienia nie należą do głównego nurtu badań nad równaniami różniczkowymi, dyktowanymi przez zastosowania, to jednak używane metody obejmują oprócz klasycznych, także te najbardziej współczesne, a autor nawiązał w kilku pozycjach bibliografii do najnowszych rezultatów dotyczących interesujących dla zastosowań typów równań. Prezentowane wyniki pokazują biegłą znajomość trudnych i skomplikowanych metod analitycznych, zastosowanych co prawda do dość specjalistycznej teorii, która jednak jest matematycznie dość ciekawa dla specjalistów z równań różniczkowych, także dla mnie, który zajmował się zagadnieniami w zewnętrznych zbiorach, a zatem nieograniczonych. Należy podkreślić, że tematyka zagadnień w zbiorach nieograniczonych jest szczególnie trudna, ponieważ zwarte włożenia przestrzeni Sobolewa nie obowiązują w zagadnieniach w obszarach nieograniczonych, a jest to podstawowe narzędzie służące do uzyskiwania zwartości w zagadnieniach związanych z równaniami różniczkowymi. Z pewnością w rozprawie widoczny jest wpływ promotora nie tylko na

wybór tematyki, ale także i dobór arsenału stosowanych metod. Tego typu zagadnienia w zbiorach nieograniczonych nie były jednak wcześniej rozpatrywane, a zajmowano się jedynie zagadnieniami w ograniczonych obszarach stożkowych, tak więc oryginalność i niezależność uzyskanych w rozprawie wyników jest zagwarantowana. Ponieważ doktorant w pracy oraz referatach wykazał się samodzielnością myślenia nie mam wątpliwości, że Damian Wiśniewski w przyszłych badaniach wykorzysta szeroki wachlarz poznanych przy tej okazji metod analitycznych i funkcjonalnych do badania innych zagadnień w równaniach cząstkowych motywowanych zastosowaniami.

Warto odnotować, że Damian Wiśniewski jest autorem dwóch prac: współautorskiej z promotorem "Boundary value problems for quasi-linear elliptic second order equations in unbounded cone-like domains" opublikowanej w 2012 roku w Central European Journal in Mathematics notowanym na liście filadelfijskiej oraz indywidualnej "Boundary value problems for a second-order elliptic equation in unbounded domains" opublikowanej w Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica także w 2012 roku. Kilkukrotnie miałem okazję wysłuchać referatów Damiana Wiśniewskiego podczas konferencji i seminariów w Będlewie, Wrocławiu oraz Toruniu. Referaty zawsze przygotowane były precyzyjnie, a odpowiedzi na zadawane pytania pokazywały, że doktorant dobrze orientuje się w referowanej przez niego tematyce. Autor rozprawy wygłaszał także referaty bądź prezentował plakaty podczas konferencji w Krakowie i Brukseli. Analiza cytowań prac w przypadku pracy doktorskiej oraz wyników uzyskanych w 2012 roku nie ma większego sensu, choć fakt, że doktorant chętnie prezentuje uzyskane rezultaty na konferencjach krajowych i zagranicznych, publikuje wyniki w czasopismach matematycznych oraz przedstawia je na seminariach pozwala żywić nadzieję, że zostaną one w najbliższej przyszłości przybliżone społeczności zainteresowanej równaniami cząstkowymi.

Sądzę, że zalety rozprawy zdecydowanie przeważają nad jej nielicznymi wadami. Uważam, że rozprawa doktorska magistra Damiana Wiśniewskiego stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego dotyczącego zbadania oszacowań a priori i asymptotyki rozwiązań dla kwaziliniowych zagadnień brzegowych w nieograniczonych zbiorach stożkowych, a jej autor wykazał się ogólną wiedzą teoretyczną z zakresu równań różniczkowych cząstkowych i umiejętnością samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Stwierdzam więc, że rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim, wnioskuję o jej przyjęcie i wnoszę o dopuszczenie magistra Damiana Wiśniewskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.


Robert Stańczy