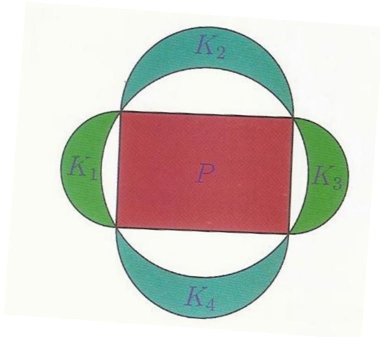
Ponadgimnazjalne



4. Rysunek przedstawia księżyce Hipokratesa. Powstają one w ten sposób, że prostokąt (czerwony) wpisujemy w koło (białe), a następnie rysujemy półkola , których średnicami są boki prostokąta. Pola tak powstałych obszarów (zielone i niebieskie) oznaczamy symbolami K_1,K_2,K_3,K_4.

Pokaż, że $K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = P$

Rozwiązanie:

Boki prostokąta oznaczmy a,b, a przekątną symbolem c.

Z tw. Pitagorasa $c^2 = a^2 + b^2$.

Pole prostokąta jest równe: $P = ab$.

Pole koła opisanego na prostokącie (średnicą jest przekątna prostokąta):

$$P_0 = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \pi\frac{c^2}{4} = \pi\frac{a^2 + b^2}{4}$$

Pole półkola opartego na a:

$$P_a = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \pi\frac{a^2}{8}$$

Pole półkola opartego na b:

$$P_b = \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \pi\frac{b^2}{8}$$

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 2P_a + 2P_b - P_0 + P = 2\pi\frac{a^2}{8} + 2\pi\frac{b^2}{8} - \pi\frac{a^2+b^2}{4} + ab = ab = P \quad c.n.p.$$

5. Znajdź wartość $f(2)$, jeśli dla dowolnego x$\neq 0$ spełniona jest równość

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

Rozwiązanie:

Podstawiamy $x = 2$ oraz $x = \frac{1}{2}$.

$$f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4}$$

Rozwiązujemy układ równań liniowych: $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3f(2) + \frac{1}{4}$, $\quad f(2) = 4 - 3\left(-3f(2) + \frac{1}{4}\right)$

Zatem $f(2) = -\frac{13}{32}$.