LISTA ZADAŃ

Zadanie 1: Szkoła urządziła 3 wycieczki dla swoich 300 uczniów. W każdej wycieczce brała udział ta sama liczba uczniów. Połowa uczestników pierwszej wycieczki, jedna trzecia uczestników drugiej i jedna czwarta uczestników trzeciej brała udział tylko w jednej wycieczce.

Ilu uczniów brało udział w każdej wycieczce? Ilu spośród uczestników pierwszej wycieczki brało udział w drugiej, a ilu z nich ponadto brało udział w trzeciej?

Rozwiązanie: Oznaczmy zbiory uczestników pierwszej, drugiej i trzeciej wycieczki kolejno przez A, B i C. Każdy z nich ma $12n$ elementów.

Zbiór $A \cap B$ ma [w tym miejscu rysunek!] $12n + 12n + 3n - 300 = 27n - 300$ elementów. Zbiór $(A \cap B) \setminus C$ ma $300 - 6n - 4n - 12n = 300 - 22n$ elementów. Zatem Zbiór $A \cap B \cap C$ ma $27n - 300 - (300 - 22n) = 49n - 600$ elementów. Moc zbioru jest nieujemna, więc $300 - 22n \geqslant 0$ i $49n - 600 \geqslant 0$. Jedyną liczbą naturalną n spełniającą ten układ nierówności jest 13. Zbiory A, $A \cap B$ i $A \cap B \cap C$ mają więc kolejno 156, 51 i 37 elementów.

Zadanie 2: Wykazać, że suma kwadratów kolejnych k liczb całkowitych dodatnich jest podzielna przez k wtedy i tylko wtedy, gdy k jest liczbą nieparzystą niepodzielną przez 3.

Rozwiązanie: Sumę tę można zapisać jako

$$(n+1)^2 + \ldots + (n+k)^2 = kn^2 + 2n(1 + \ldots + k) + (1^2 + \ldots + k^2).$$

Stosując wzory na sumy:

$$(n+1)^2 + \ldots + (n+k)^2 = kn^2 + 2n\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Liczba ta dzieli się przez k wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(k+1)(2k+1)$ dzieli się przez 6. Gdy k jest parzyste lub podzielne przez 3, to liczba $(k+1)(2k+1)$ nie ma tej samej własności, a więc nie dzieli się przez 6. Natomiast gdy k jest nieparzyste i niepodzielne przez 3, to liczba $k+1$ jest parzysta, a jedna z liczb $k+1$ i $2k+1$ dzieli się przez 3; zatem ich iloczyn dzieli się przez 6.

Zadanie 3: Na płaszczyźnie obrano 6 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Każde dwa punkty połączono odcinkiem niebieskim lub czerwonym. Dowieść, że istnieje trójkąt o wierzchołkach w wybranych punktach, którego boki są tego samego koloru.

Rozwiązanie: Weźmy dowolny z 6 punktów. Wychodzi z niego 5 krawędzi w dwóch kolorach, a więc co najmniej 3 z nich są tego samego koloru, np. niebieskie [w tym miejscu rysunek!]. Wtedy albo odcinki łączące końce tych krawędzi są czerwone i mamy trójkąt czerwony, albo jeden z nich jest niebieski i mamy trójkąt niebieski.