Gimnazjum

1. Dane są trzy koła, których średnice tworzą trójkąt prostokątny ABC. Pole koła, którego średnicą jest przeciwprostokątna jest równe $\frac{25}{16}\pi$.

   a. Oblicz pola pozostałych kół jeżeli wiadomo, że trójkąt ABC jest równoramienny.
   b. Uzasadnij, że suma pól pozostałych kół zależy tylko od długości przeciwprostokątnej trójkąta ABC.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia:

c - długość przeciwprostokątnej AC ,

a – długość jednej przyprostokątnej,

b- długość drugiej przyprostokątnej.

Pole koła opartego na przeciwprostokątnej jest równe $P = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \pi\frac{c^2}{4} = \pi\frac{25}{16}$. Stąd $c = \frac{5}{2}$

a) Trójkąt jest równoramienny, więc $a = b$. Z tw. Pitagorasa $2a^2 = \frac{25}{4}$. Zatem $a = \frac{5}{2\sqrt{2}}$..

Pola pozostałych kół są równe i wynoszą $P_a = \pi\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 = \pi\frac{25}{32}$

b) Z tw. Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$.

Pole koła o średnicy a jest równe $P_a = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi\frac{a^2}{4}$

Pole koła o średnicy b jest równe $P_b = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \pi\frac{b^2}{4}$

Zatem $P_a + P_b = \pi\frac{a^2}{4} + \pi\frac{b^2}{4} = \pi\frac{c^2}{4}$ zależy tylko od c.

2. Uzasadnij, że wśród dowolnie wybranych sześciu różnych cyfr znajdują się trzy takie cyfry (niekoniecznie różne), z których jedna jest sumą dwóch pozostałych.

Rozwiązanie:

Sposób I

Niech $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ - sześć wybranych różnych cyfr.

Jeśli jedna z nich jest zerem, to $a_i + 0 = a_i$ – teza jest prawdziwa.

Niech więc wszystkie wybrane liczby będą różne od zera. Zapiszmy je w porządku rosnącym: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$. Tworzymy nowy ciąg różnych liczb:

$a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < a_4 - a_1 < a_5 - a_1 < a_6 - a_1$.

W obydwu ciągach jest 11 cyfr a wszystkich cyfr jest 10, wiec musi być (z Zasady Szufladkowej Dirichleta) $a_i = a_k - a_1$. Stąd $a_i + a_1 = a_k$.

Sposób II

Systematyczna analiza wszystkich możliwych wyborów.

3. Pan Henryk, właściciel sklepu mięsnego, sprzedaje schab z kością po 13zł za kg, schab bez kości po 16zł za kg, a kości po 4zł za kg i nic nie zarabia na oddzielaniu kości od schabu. Pewnego dnia, pierwszą transakcją była sprzedaż schronisku dla zwierząt wszystkich kości po promocyjnej cenie 1zł za kg. O ile procent co najmniej powinien Pan Henryk podnieść cenę schabu bez kości, by nic nie stracić?

Rozwiązanie:

Cena za kg:

Schab z kością 13zł, Schab bez kości 16zł, Kości 4zł

Niech x - waga w kg schabu bez kości, y - waga kości w kg

Otrzymujemy równanie: $13(x + y) = 16x + 4y$. Stąd $x = 3y$.

Wtedy udział kości: $\frac{y}{x+y} = \frac{y}{4y} = \frac{1}{4}$ a udział schabu bez kości: $\frac{3}{4}$

Pewnego dnia…:

Cena kości – 1zł za kg Cena schabu bez kości – c zł za kg

$\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot c = 13$. Stąd c=17

O ile procent podnieść cenę schabu bez kości? $\frac{17}{16}$ - 1=$\frac{1}{16} = 0{,}625$

Odp.: 6,25%

4. Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba

$$3^{n+3}+3^{n+4}+3^{n+5}+3^{n+6}$$

nie jest podzielna przez 7, ale jest podzielna przez pozostałe liczby naturalne dodatnie mniejsze od 11.

Rozwiązanie:

$a = 3^{n+3} + 3^{n+4} + 3^{n+5} + 3^{n+6} = 3^{n+3}(1 + 3 + 3^2 + 3^3) = 3^n \cdot 3^3 \cdot 40 = 3^n \cdot 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$

7 nie dzieli a, bo jest liczbą pierwszą i nie występuje w rozkładzie a na czynniki pierwsze.

1 dzieli każdą liczbę.

Pozostałe liczby mniejsze od 11 są dzielnikami a, bo 2, 3 i 5 są liczbami pierwszymi w rozkładzie liczby a.

Natomiast pozostałe liczby mają następujące rozkłady na czynniki pierwsze:

$6 = 2 \cdot 3, \quad 10 = 2 \cdot 5, \quad 4 = 2^2, \quad 8 = 2^3, \quad 9 = 3^2$

5. Dno formy do ciasta wykonane z blachy stalowej waży 25dag, natomiast ścianki boczne ważą w sumie 20dag. Ala zauważyła, że dno drugiej formy do ciasta jest podobne do dna pierwszej formy w skali 3:1 a ścianki boczne są tej samej wysokości. Ile waży druga forma, jeśli obydwie zostały wykonane z tych samych materiałów.

Rozwiązanie:

Korzystamy z własności skali podobieństwa k.

Dla pól mamy $P_1 = k^2 \cdot P$

Dla długości mamy $l_1 = k \cdot l$.

Ponieważ formy zrobione są z tej samej blachy o stałej grubości, to powyższe własności dotyczą też wag:

Dla dna: $d = 25\ dag,\ d_1 = 9 \cdot 25 = 225\ dag$

Dla boków: $b = 20\ dag,\ b_1 = 3 \cdot 20 = 60\ dag$

Zatem waga dużej formy jest równa $225 + 60 = 285\ dag$.