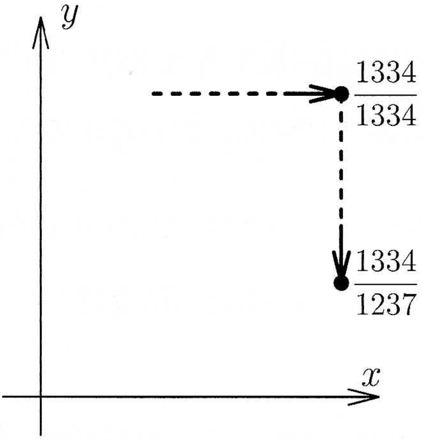
Dowód. Niech T_n ($n \geqslant 0$) oznacza numer ułamka $\frac{n}{n}$. W szczególności, $T_0 = 0$, $T_1 = 2$, $T_2 = 12$ (patrz rysynek 1).



Rysunek 2: Względne położenie ułamków $\frac{1334}{1334}$ oraz $\frac{1334}{1237}$

Oznaczmy poszukiwaną liczbę przez N. Ułamek $\frac{1334}{1237}$ znajdzie się o 97 ułamków niżej od ułamka $\frac{1334}{1334}$ (rysunek 2). W taki sposób,

$$N = T_{1334} + 97, \tag{1}$$

gdzie T_{1334} jest numerem ułamka $\frac{1334}{1334}$.

Znajdźmy wzór na T_n.

Z rysunku 3 wynika, że pętla spirali, łącząca ułamek $\frac{n-1}{n-1}$ z ułamkiem $\frac{n}{n}$ zawiera dwa odcinki długości $2(n-1)$ oraz dwa odcinki długości $2n-1$. Więc

$$T_n = T_{n-1} + 4(n-1) + 4n - 2 = T_{n-1} + 8n - 6 \tag{2}$$

Stosując rekurencyjnie wzór (2), otrzymamy:

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-2} + 8(n-1) - 6 + 8n - 6 = \\ &= T_{n-3} + 8(n-2) - 6 + 8(n-1) - 6 + 8n - 6 = \\ &= \cdots = \\ &= T_0 + 8 \cdot (1 + \cdots + (n-1) + n) - 6n = \\ &= 4n(n+1) - 6n = 2n(2n-1) \end{aligned}$$

Przy obliczeniu użyto wzór na sumę ciągu arytmetycznego oraz to, że $T_0 = 0$.

Podtsawiając wzór na T_n do (1), rozwiązujemy zadanie:

$$N = 2 \cdot 1334(2 \cdot 1334 - 1) + 97 = 2668 \cdot 2667 + 978 = 7\,115\,556 + 97 = 7\,115\,653$$

$\square$