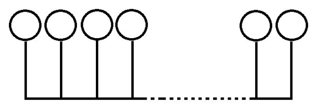
XII WARMIŃSKO - MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

SZKOŁA PODSTAWOWA - ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

1. Postanowiono posadzić drzewka w równych odstępach wzdłuż parkowej alejki, od początku do końca, tak jak na planie



Zakupiono pewną ilość drzew. Okazało się że jeśli posadzić je co trzy metry, to będzie o jedno drzewko za mało. A jeśli posadzić je co cztery metry to będzie o cztery drzewka za dużo. Jaką długość ma alejka? Ile zakupiono drzewek?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez x długość alejki parkowej. Wówczas, sadząc drzewka co 3 metry potrzebujemy ich $\frac{1}{3} \cdot x + 1$, natomiast sadząc co 4 metry potrzebujemy $\frac{1}{4} \cdot x + 1$ drzewek. Ponieważ w pierwszym przypadku mamy o 1 drzewko za mało, a w drugim o 4 drzewka za dużo, to prawdziwe jest równanie

$$\frac{1}{3} \cdot x + 1 - 1 = \frac{1}{4} \cdot x + 1 + 4$$

Rozwiążmy je:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot x &= \frac{1}{4} \cdot x + 5 \\ \frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot x &= 5 \\ \frac{4}{12} \cdot x - \frac{3}{12} \cdot x &= 5 \\ \frac{1}{12} \cdot x &= 5 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Obliczmy teraz, ile zakupiono drzewek:

$$\frac{60}{3} + 1 - 1 = 20$$

Odpowiedź: Alejka ma 60 m długości. Kupiono 20 drzewek.

2. Krawcowa ma do dyspozycji prostokątny kawałek płótna o wymiarach 224 cm x 288 cm. Zlecono jej uszycie możliwie największych (o najdłuższym boku), jednakowych chust, każda w kształcie kwadratu, którego długość boku będzie wyrażona liczbą naturalną. Ile takich chust jest w stanie uszyć krawcowa z powierzonego jej materiału, zakładając, że

nie pozostaną jej żadne resztki materiału?

Rozwiązanie. Znajdźmy najpierw największy wspólny dzielnik liczb 224 i 288:

224	2
112	2
56	2
28	2
14	2
7	7
1	

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Z powyższych rozkładów widać, że $NWD(224, 288) = 2^5 = 32$. Ponieważ $224 : 32 = 7$, oraz $288 : 32 = 9$, to z powierzonego materiału można uszyć 63 chusty, bo $7 \cdot 9 = 63$.
Odpowiedź: Z powierzonego materiału krawcowa może uszyć 63 kwadratowe chusty.

3. Poniższą tabelę należy uzupełnić liczbami naturalnymi, tak żeby otrzymać tabelę o następującej własności: w każdym wierszu i w każdej kolumnie mamy stałe różnice pomiędzy kolejnymi liczbami. Te różnice są stałe w wierszu, lub kolumnie, ale nie muszą być takie same dla różnych wierszy lub kolumn. Na przykład w pierwszej kolumnie mamy: $4 - 1 = 3$, $7 - 4 = 3$, $10 - 7 = 3$. W pierwszej kolumnie stała różnica to 3. Pamiętaj, że w innych wierszach i kolumnach stała różnica nie musi być 3, może być zupełnie inna. Rozpocznij od znalezienia wartości x.

1			
4			25
7			x
10		36	

Rozwiązanie.

- Wprowadzamy pomocnicze oznaczenia, m oraz n, w czwartym wierszu tabeli

1			
4			25
7			x
10	m	36	n

- Ponieważ 10 oraz 36 są, odpowiednio, pierwszą i trzecią liczbą w czwartym wierszu, oraz ich różnica $36 - 10 = 26$, więc stała dodana do jednej liczby, po to aby otrzymać liczbę kolejną w wierszu czwartym, jest równa $\frac{26}{2}$, czyli 13. Zatem

$$m = 10 + 13 = 23 \quad \text{oraz} \quad n = 36 + 13 = 49$$

1			
4			25
7			x
10	23	36	49

- W czwartej kolumnie, 25 oraz 49 są, odpowiednio, drugą oraz czwartą liczbą. Ponieważ ich różnica różnica $49 - 25 = 24$, więc stała dodana do jednej liczby, po to aby otrzymać kolejną liczbę w czwartej kolumnie, jest równa $\frac{24}{2}$, czyli 12. Zatem

$$x = 25 + 12 = 37$$

1			
4			25
7			37
10	23	36	49

- Uzupełniamy drugi wiersz tabeli

1			
4	11	18	25
7			37
10	23	36	49

- Uzupełniamy trzeci wiersz tabeli

1			
4	11	18	25
7	17	27	37
10	23	36	49

- Uzupełniamy drugą kolumnę tabeli

1	5		
4	11	18	25
7	17	27	37
10	23	36	49

- Uzupełniamy pierwszy wiersz tabeli

1	5	9	13
4	11	18	25
7	17	27	37
10	23	36	49

Odpowiedź: a) $x = 37$, b)

1	5	9	13
4	11	18	25
7	17	27	37
10	23	36	49

4. Grześ postanowił, że część półek w swoim nowym regale przeznaczy na książki i na każdej półce ustawi tę samą liczbę książek. Gdy zaczął ustawiać po 12 książek na jednej półce, okazało się, że została mu jedna książka. Podobnie, gdy ustawiał po 16 książek, również została mu jedna książka. Wiedząc, że wszystkich ustawianych książek było mniej niż 50, ustal dokładną ich liczbę.

Rozwiązanie. Wypiszmy najpierw wszystkie wielokrotności 12 mniejsze od 50

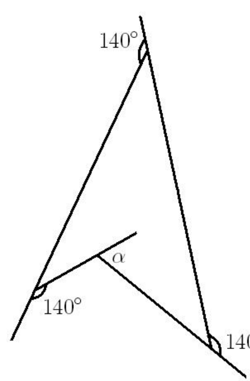
$$12 \quad 24 \quad 36 \quad 48$$

oraz wszystkie wielokrotności 16 mniejsze od 50.

$$16 \quad 32 \quad 48$$

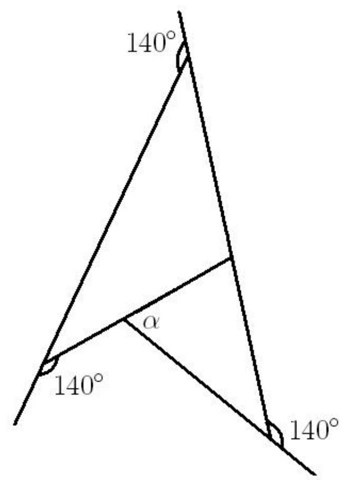
Widać, że najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 12 i 16 jest 48.
Stąd wiedząc, że Grzesiowi za każdym razem zostawała jedna książka, wiemy już, że ma on 49 książek.
Odpowiedź: Grześ ma 49 książek.

5. Jaka jest miara kąta α na poniższym rysunku?

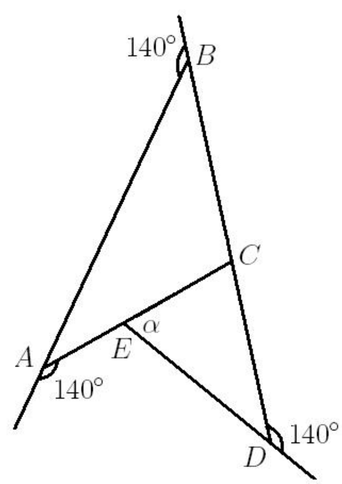


Rozwiązanie.

- Przedłużamy jedno z ramion kąta o mierze α

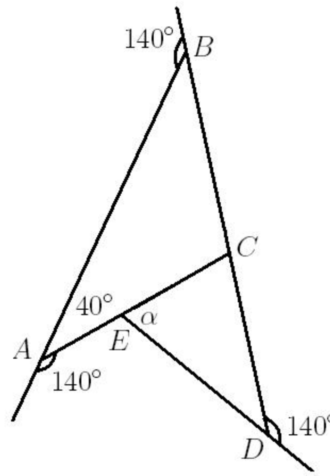


- Wprowadzamy pomocnicze oznaczenia punktów A, B, C, D, E



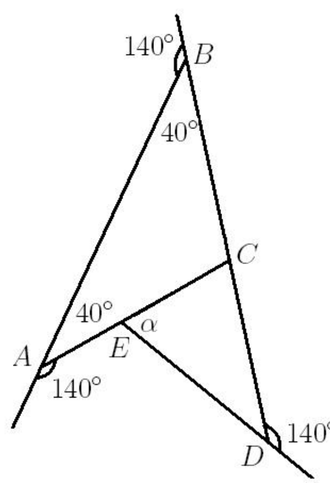
- Ponieważ suma kątów przyległych jest kątem półpełnym, więc

$$|\angle BAC| = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ\,.$$



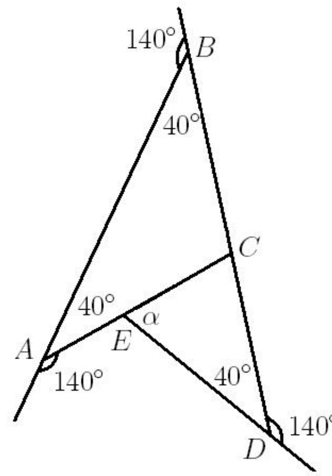
- Kąt rozwarty o wierzchołku B ma miarę 140°. Zatem $\angle ABC$, jako kąt przyległy, ma miarę

$$|\angle ABC| = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ\,.$$



- Miara kąta $\angle CDE$, jako przyległego do kąta rozwartego o wierzchołku D, jest równa

$$|\angle CDE| = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ\,.$$

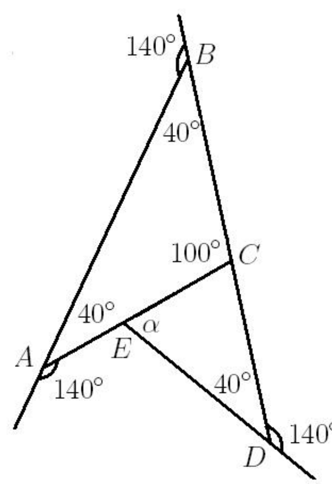


- Ponieważ suma kątów wewnętrznych trójkąta ABC jest równa 180°, więc

$$|\angle ACB| + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ\,.$$

Wynika stąd, że

$$|\angle ACB| = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ\,.$$

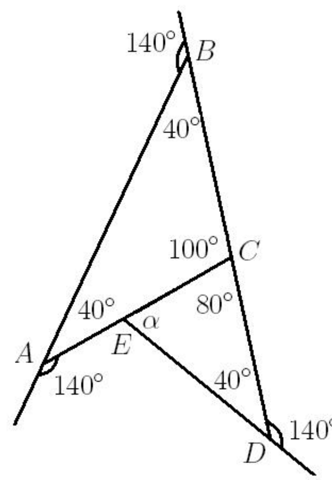


- Ponieważ kąty: $\angle ACB$ oraz $\angle ECD$ są przyległe, więc

$$|\angle ECD| + 100^\circ = 180^\circ\,.$$

Stąd

$$|\angle ECD| = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ\,.$$



- Korzystając z tego, że suma kątów wewnętrznych trójkąta ECD jest równa 180°, otrzymujemy

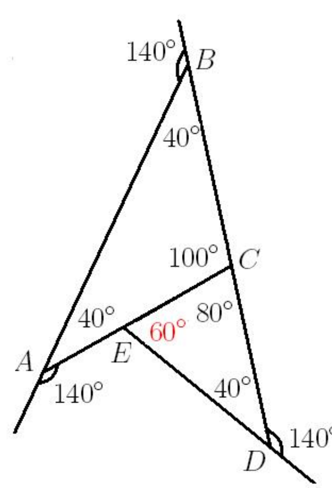
$$\alpha + 40^\circ + 80^\circ = 180^\circ\,,$$

czyli

$$\alpha = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ\,.$$

Zatem

$$\alpha = 60^\circ\,.$$



Odpowiedź: Miara kąta α jest równa 60°