X WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
18 maja 2012
(szkoły ponadgimnazjalne)

Zadanie 1
Obecnie używane tablice rejestracyjne wydawane są od 1 maja 2000r. Numery rejestracyjne aut są tworzone ze zbioru liter: **{A, B,C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z}** oraz cyfr od **0** do **9**. Dla aut miasta Olsztyn wszystkie tablice zaczynają się od liter **NO**, po których następuje 5 cyfr (bez **00000**) lub 4 cyfry (bez **0000**) i litera z dostępnego zbioru liter, nie można jednak stosować liter **B, D, I, O, Z** jako zbyt podobnych do cyfr **8, 0, 1, 0, 2**. W którym roku na pewno skończą się tak tworzone tablice rejestracyjne aut dla miasta Olsztyn, jeżeli przyjmiemy, że rocznie rejestrowanych jest co najmniej 11500 aut?

Rozwiązanie:
Ilość tablic to:
ilość 5-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru cyfr minus 1 ($10^5-1=99999$)
ilość 4-elementowych wariacji z powtórzeniami minus 1 mnożona przez 20 dostępnych liter ($(10^4-1)\cdot 20)=199980$.
Mamy więc razem $99999+199980=299979$ możliwości utworzenia tablic rejestracyjnych składających się z 5 cyfr lub 4 cyfr i jednej litery.
Zakładając, że rocznie rejestrowanych jest co najmniej 11500 aut,
mamy $299979 : 11500 = 26,085$, a więc tablice wyczerpią się w ciągu 26 lat.
Rejestrowanie samochodów rozpoczęto w roku 2000, tablice skończą się na pewno w roku 2026.

Zadanie 2
Dane są liczby

$A = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1}$ oraz $B = \frac{2}{xy+1}$,

gdzie x i y są takimi liczbami rzeczywistymi, że $x \neq y$ i $xy + 1 \neq 0$.

Wyznacz $A + B$, jeżeli wiadomo, że $A = B$.

Rozwiązanie:
Wychodząc od równości $A = B$, dostajemy kolejno:

$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1}$

$\frac{x^2+y^2+2}{x^2y^2+x^2+y^2+1} = \frac{2}{xy+1}$

$x^3y + xy^3 + 2xy + x^2 + y^2 + 2 = 2x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2$

$xy(x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) = 0$

$(x - y)^2(xy - 1) = 0$

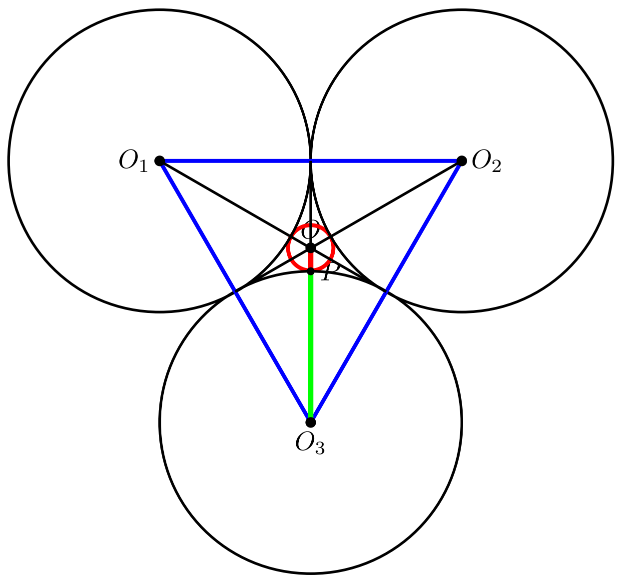
Ponieważ zgodnie z założeniem $x \neq y$, więc $xy = 1$.

Wtedy $A = B = \frac{2}{1+1} = 1$, a stąd $A + B = 2$.

Zadanie 3

Dane są trzy jednakowe okręgi wzajemnie styczne. Pomiędzy nimi znajduje się mniejszy okrąg styczny do nich. Jaki jest stosunek promienia okręgu mniejszego do promienia okręgu większego?

Rozwiązanie:



Sytuację opisaną w zadaniu przedstawia rysunek.
Oznaczmy odpowiednio promienie małego i dużego okręgu przez $\mathbf{r} = OP$ oraz $\mathbf{R} = PO_3$.
Zauważmy, że trójkąt $O_1O_2O_3$ (niebieski) jest trójkątem równobocznym o boku $2\mathbf{R}$.
Jego wysokości przecinają się w punkcie O, który dzieli każdą z nich w stosunku $2:1$ (na odcinki długości $\frac{2}{3}h$ i $\frac{1}{3}h$).
Zauważmy, że $\frac{2}{3}h = \mathbf{r} + \mathbf{R}$. (odpowiednio czerwony OP i zielony PO_3 odcinek).
Wysokość trójkąta równobocznego o boku a to $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. U nas $a = 2\mathbf{R}$, więc $h = \sqrt{3}\mathbf{R}$.
Otrzymujemy więc zależność $\mathbf{r} + \mathbf{R} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\mathbf{R}$ i nastepnie

$\mathbf{r} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\mathbf{R} - \mathbf{R}$

$\mathbf{r} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}\mathbf{R}$.

Stosunek promienia okręgu mniejszego do promienia okręgu większego wynosi: $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \approx 0.1547$.

Zadanie 4
Dana jest liczba trzycyfrowa, której potrojona suma cyfr wynosi 42. Jeżeli od podwojonej sumy dwóch pierwszych cyfr odejmiemy 7, otrzymamy trzecią cyfrę liczby. Jeżeli do tej liczby dodamy 297, otrzymamy liczbę trzycyfrową złożoną z tych samych cyfr, występujących w niej w odwrotnej kolejności. Jaka to liczba?

Rozwiązanie:
Daną liczbę przedstawmy w postaci **xyz**, gdzie **x** oznacza liczbę setek, **y** liczbę dziesiątek i **z** liczbę jednostek. Szukana przez nas liczba spełnia następujący układ równań:

$$\begin{cases} 3(x+y+z)=42 \\ 2(x+y)-7=z \\ 100x+10y+z+297=100z+10y+x \end{cases}$$

Po uproszczeniu układu równań mamy:

$$\begin{cases} x+y+z=14 \\ 2x+2y-z=7 \\ x-z=-3 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równan jest:

$$\begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=7 \end{cases}$$

Szukana liczba to **437**.

Zadanie 5
Wszystkie cyfry, które pojawiają się w poniższym mnożeniu są cyframi należącymi do zbioru $\{2, 3, 5, 7\}$. Odtwórz to mnożenie.

$$\begin{array}{ccccc} & & * & * & * \\ & \times & & * & * \\ \hline & * & * & * & * \\ * & * & * & * & \\ \hline * & * & * & * & * \end{array}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{ccccc} & & 7 & 7 & 5 \\ & \times & & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & \\ \hline 2 & 5 & 5 & 7 & 5 \end{array}$$

Wskazówka: rozważając wszystkie iloczyny liczb należących do zbioru $\{2, 3, 5, 7\}$ zauważamy, że na ostatniej pozycji mnożnej i mnożnika dopuszczalne są jedynie konfiguracje:
$3 \cdot 5 = 15$,
$5 \cdot 3 = 15$,
$5 \cdot 5 = 25$,
$5 \cdot 7 = 35$,
$7 \cdot 5 = 35$.
Pod uwagę weźmy np. pierwszą konfigurację i zacznijmy mnożenie $3 \cdot 5 = 15$:

$$\begin{array}{cccc} & * & X & 3 \\ \times & & * & 5 \\ \hline * & * & Y & 5 \end{array}$$

Zastanówmy się teraz, jaką liczbę można wpisać na pozycję oznaczoną X. Nie może to być 2, ponieważ wówczas na pozycji Y znalazłaby się 1, nie może to być 3, ponieważ wówczas Y byłoby równe 6, nie może być 5, bo Y byłoby równe 6, odpada również 7, bo dostalibyśmy Y równe 6. Tym samym konfigurację pierwszą możemy odrzucić i rozważać konfigurację drugą w podobny sposób.

$$\begin{array}{cccc} & * & X & 5 \\ \times & & * & 3 \\ \hline * & * & Y & 5 \end{array}$$

Na pozycji X może znaleźć się 2, wówczas dostaniemy
$$\begin{array}{cccc} & V & 2 & 5 \\ \times & & * & 3 \\ \hline Z_1 & Z_2 & 7 & 5 \end{array}$$

Niestety, za V nie możemy wstawić żadnej z liczb $2, 3, 5, 7$, gdyż wynik ich mnożenie przez 3 $(Z_1 Z_2)$ zawsze będzie zawierał jakąś cyfrę nienależącą do dopuszczalnego zbioru cyfr.

Następnie rozważamy konfigurację
$$\begin{array}{cccc} & * & X & 5 \\ \times & & * & 3 \\ \hline * & * & Y & 5 \end{array}$$

gdzie za X bierzemy kolejne cyfry ze zbioru $\{2, 3, 5, 7\}$. X nie może być równe 3, ponieważ Y byłoby równe 0. X nie może być równe 5, bo wówczas Y byłoby równe 6. Za X możemy wziąć 7.

Wówczas mamy:
$$\begin{array}{cccc} & V & 7 & 5 \\ \times & & * & 3 \\ \hline Z_1 & Z_2 & 2 & 5 \end{array}$$

Zastanówmy się, co można wziąć na pozycji V. Odpadają 2, 3 i 5, jedyne dopuszczalne rozwiązanie to V równe 7. Dostajemy:
$$\begin{array}{cccc} & 7 & 7 & 5 \\ \times & & W & 3 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 5 \end{array}$$

Za W można wziąć 3, wynik mnożenia 775 przez 3 już znamy, dostajemy:
$$\begin{array}{ccccc} & & 7 & 7 & 5 \\ & \times & & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & \\ \hline 2 & 5 & 5 & 7 & 5 \end{array}$$

Jest to poprawne rozwiązanie (zresztą jedyne w przypadku tego zadania).
Gdybyśmy za W podstawili 5, wynik dodawania na trzeciej pozycji od końca wyprowadzałby poza dopuszczalny zbiór cyfr, mianowicie:
$$\begin{array}{ccccc} & & 7 & 7 & 5 \\ & \times & & 5 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 2 & 5 \\ * & * & 7 & 5 & \\ \hline * & * & 0 & 7 & 5 \end{array}$$

Pozostałe konfiguracje należy sprawdzić w podobny sposób.