XII WARMIŃSKO - MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
15 maja 2014r.

Zadania dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

Zad. 1. Obliczyć sumę

$$2+22+222+\cdots+\underbrace{222\ldots2}_{2014}.$$

Rozwiązanie:

$$S=2+22+222+\cdots+\underbrace{222\ldots2}_{2014}\ /\ \cdot\frac{9}{2}$$

$$\frac{9}{2}S=9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots9}_{2014}$$

$$\frac{9}{2}S=10-1+100-1+1000-1+\cdots+\underbrace{100\ldots0}_{2015}-1$$

$$\frac{9}{2}S=10\left(1+10+100+1000+\cdots+\underbrace{100\ldots0}_{2014}\right)-2014.$$

Suma $1+10+100+1000+\cdots+\underbrace{100\ldots0}_{2014}$ jest sumą 2014 elementów ciągu geometrycznego o $q=10$ i $a_1=1$. Zatem

$$\frac{9}{2}S=10\cdot1\cdot\frac{1-10^{2014}}{1-10}-2014$$

$$\frac{9}{2}S=10\frac{10^{2014}-1}{9}-2014\ /\ \cdot\frac{2}{9}$$

$$S=2\frac{10^{2015}-10-9\cdot2014}{81}.$$

Odpowiedź: Suma wynosi $\frac{2\left(10^{2015}-18136\right)}{81}$.

Zad. 2. Udowodnić, że jeżeli długości boków trójkąta prostokątnego są liczbami całkowitymi, to jego pole jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie: Niech a oznacza długość przeciwprostokątnej trójkąta, b i c oznaczają długości przyprostokątnych. Wówczas $a^2=b^2+c^2$.

Obie przyprostokątne nie mogą być liczbami całkowitymi nieparzystymi, ponieważ w takim razie przeciwprostokątna musiałaby być liczbą całkowitą parzystą. Wobec tego w równaniu $a^2=b^2+c^2$ lewa strona dzieliłaby się przez 4 (liczba parzysta jest podzielna przez 2, a podniesiona do kwadratu - przez 4), natomiast prawa strona nie (jeśli $b=2x+1$, $c=2y+1$, to $b^2+c^2=4[x(x+1)+y(y+1)]+2$), co daje sprzeczność.

W takim razie przyprostokątne mogą być wyrażone dwiema liczbami całkowitymi parzystymi lub parzystą i nieparzystą. Iloczyn liczby całkowitej parzystej i nieparzystej (lub dwóch parzystych) jest zawsze podzielny przez 2 ($2x(2y+1)=2(2xy+x)$). Stąd pole wyrażone wzorem $P=\frac{bc}{2}$ jest liczbą całkowitą.

Zad. 3. Wypisujemy kolejne liczby naturalne, otrzymując ciąg cyfr

$$123456789101112131415 16 \ldots.$$

Jaka cyfra znajduje się na 2014-tym miejscu? Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie: W danym ciągu cyfr znajduje się 9 liczb jednocyfrowych, 90 liczb dwucyfrowych, 608 liczb trzycyfrowych. 2014-ta cyfra w ciągu jest pierwszą cyfrą 609-tej liczby trzycyfrowej, czyli liczby 708.

Odpowiedź: Jest to cyfra 7.

Zad. 4. Pies goni zająca, który znajduje się w odległości 60 swoich skoków od psa. Gdy zając zrobi 9 skoków, w tym czasie pies zrobi ich 6. Wielkość 3 psich skoków jest równa 7 skokom zająca. Obliczyć, ile skoków musi zrobić pies, aby dogonić zająca.

Rozwiązanie: Drogi, które przebiegną pies i zając są różne, czasy biegów są natomiast równe. Jeśli drogi i prędkość psa i zająca oznaczymy odpowiednio przez s_1 i s_2 oraz v_1 i v_2, to ponieważ $s = vt$, mamy

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}.$$

Jeśli skok psa oznaczymy przez x, to: $s_1 = x$ skoków psa,
$s_2 = x$ skoków psa $-$ 60 skoków zająca,
$v_1 = 6$ skoków psa w obranej jednostce czasu,
$v_2 = 9$ skoków zająca w tej samej jednostce czasu.

Skoki psa i zająca są różnymi jednostkami długości. Abyśmy mogli zadanie rozwiązać musimy przejść na jedną z naszych jednostek, np. na skok psa. Z treści zadania wiadomo, że 7 skoków zająca = 3 skokom psa, czyli 1 skok zająca = $\frac{3}{7}$ skoku psa. Mamy więc
$s_2 = x$ skoków psa $- 60 \cdot \frac{3}{7}$ skoków psa $= x - \frac{180}{7}$ skoków psa,
$v_2 = 9 \cdot \frac{3}{7}$ skoków psa w obranej jednostce czasu.

Po podstawieniu tych wartości do równania otrzymujemy

$$\frac{x \text{ skoków psa}}{6 \text{ skoków psa / jednostkę czasu}} = \frac{x - \frac{180}{7} \text{ skoków psa}}{\frac{27}{7} \text{ skoków psa / jednostkę czasu}},$$

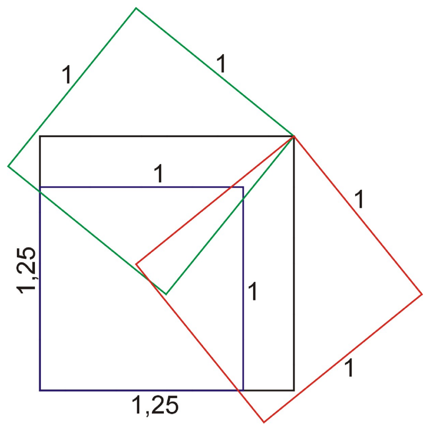
$$\frac{x}{6} = \frac{x - \frac{180}{7}}{\frac{27}{7}},$$

$$\frac{x}{6} = \frac{7x - 180}{7} \cdot \frac{7}{27} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{7x - 180}{9} \Rightarrow x = 72.$$

Odpowiedź: Pies musi wykonać 72 skoki, aby dogonić zająca.

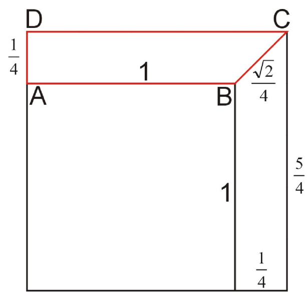
Zad. 5. Czy kwadrat o boku 1,25 można pokryć trzema kwadratami o boku 1 (tzn. kwadrat o boku 1,25 powinien zawierać się w sumie trzech kwadratów o boku 1)? Odpowiedź uzasadnić.

Odpowiedź: Kwadrat o boku 1,25 można pokryć trzema kwadratami o boku 1 (rys. 1.).



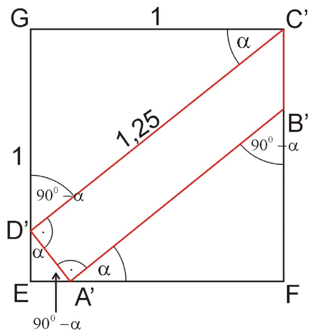
Rysunek 1:

Rozwiązanie: Na kwadracie o boku 1,25 można odłożyć trapez prostokątny o podstawach równych 1 i $\frac{5}{4}$ oraz ramionach równych $\frac{\sqrt{2}}{4}$ oraz $\frac{1}{4}$ (rys. 2.). Pokażemy,



Rysunek 2:

że w kwadrat o boku długości 1 można wpisać trapez prostokątny $A'B'C'D'$ o jednej podstawie długości $\frac{5}{4}$, drugiej podstawie długości większej od 1 i ramieniu długości większej od $\frac{1}{4}$ (rys. 3.).



Rysunek 3:

$$|GD'|^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 \Longrightarrow |GD'| = \frac{3}{4},$$

$$|GD'| + |D'E| = 1 \Longrightarrow |D'E| = \frac{1}{4},$$

więc $|A'D'| > \frac{1}{4}$. Z podobieństwa $\triangle D'GC'$ i $\triangle A'ED'$ (kkk)

$$\frac{0,25}{1} = \frac{|A'D'|}{1,25} \Longrightarrow |A'D'| = \frac{5}{16} > \frac{1}{4},$$

$$\frac{|A'E|}{0,75} = \frac{0,25}{1} \Longrightarrow |A'E| = \frac{3}{16} \Longrightarrow |A'F| = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}.$$

Z podobieństwa $\triangle D'EA'$ i $\triangle A'FB'$ (kkk)

$$\frac{|A'B'|}{\frac{5}{16}} = \frac{\frac{13}{16}}{\frac{1}{4}} \Longrightarrow |A'B'| = \frac{65}{64} > 1.$$

Zatem, skoro w kwadrat o boku 1 można wpisać trapez prostokątny $A'B'C'D'$, to w kwadracie o boku 1 zawiara się trapez prostokątny $ABCD$.