

VII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne, 14 maja 2009
Wydział Matematyki i Informatyki UWM w Olsztynie

1. Pokaż, że wielomian

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$$

przyjmuje tylko wartości dodatnie.

2. Pokaż że liczba $\sqrt{5n+2}$ jest niewymierna dla dowolnej liczby naturalnej n .

Dla przypomnienia, pierwiastek kwadratowy z liczby naturalnej jest albo liczbą niewymierną albo liczbą naturalną. Tak więc $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \dots$ są liczbami niewymiernymi, a $\sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4, \dots$

3. Jakie jest największe możliwe pole prostokąta, którego wierzchołki leżą na bokach trójkąta równobocznego o boku a ?
4. A i B są ustalonymi punktami danego okręgu. Trzeci punkt C porusza się po tym samym okręgu. Opisz figurę utworzoną przez środki ciężkości trójkątów ABC .

Środek ciężkości trójkąta jest punktem przecięcia trzech środkowych tego trójkąta. Środkowa w trójkącie to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku. Środek ciężkości dzieli każdą środkową w proporcji 1 : 2.

(Fizyczne znaczenie środka ciężkości polega na tym, że aby trójkątną płytkę utrzymać na jednym palcu trzeba podeprzeć ją w środku ciężkości.)

5. Cząsteczka fulerenu C_{60} ma 60 atomów węgla, które znajdują się w wierzchołkach pewnego wielościanu wypukłego P . Wielościan P ma ściany dwóch rodzajów: pięciokąty foremne i sześciokąty foremne. W każdym wierzchołku wielościanu P spotykają się trzy ściany: dwie sześciokątne i jedną pięciokątną. Ile ścian pięciokątnych, a ile ścian sześciokątnych ma wielościan P ?

W rozwiązaniu skorzystaj z faktu, że w każdym wielościanie wypukłym liczba jego ścian S , liczba krawędzi K i liczba wierzchołków W związane są wzorem Eulera

$$S - K + W = 2$$