XII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Olsztyn, 15 maja 2014

Kategoria: szkoła gimnazjalna

Zadania i rozwiązania

Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia $a^4 + b^4$, wiedząc że

$$a + b = 1 \text{ i } a^2 + b^2 = 2.$$

Rozwiązanie: Z tego, że $a^2 + b^2 = 2$ mamy (podnosząc obie strony do kwadratu) :

$$a^4 + b^4 = 4 - 2a^2b^2. \tag{1}$$

Z kolei, z tego, że $a + b = 1$ dostaniemy (podnosząc obie strony do kwadratu i mając na względzie, że $a^2 + b^2 = 2$) :

$$ab = -\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Ostatecznie z (1) i (2) :

$$a^4 + b^4 = 4 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 3\frac{1}{2}.$$

Zadanie 2. Liczba uczniów pewnego gimnazjum jest zawarta pomiędzy 700 a 900. Kiedy grupujemy ich po 18, po 20, bądź po 24 osoby, to za każdym razem pozostaje 9 uczniów. Jaka jest liczba uczniów tego gimnazjum?

Rozwiązanie: Jeżli x oznacza liczba uczniów w gimnazjum, to z warunków zadania wiemy, że liczba $x - 9$ jest podzielna przez 18, 20 i 24. Szukamy najmniejszej wspólnej wielokrotności tych liczb. Jest nią liczba 360. Zatem liczba $x - 9$ jest taką wielokrotnością liczby 360, która zawarta jest między 700 a 900. Ostatecznie liczba uczniów wynosi 729.

Zadanie 3. Dzieci z klasy Ib wraz z opiekunami wyjechały na wycieczkę autokarem, 55 procent osób w autokarze stanowiły dziewczynki, 32,5 procent osób w autokarze stanowili chłopcy, pozostałe 5 osób, to opiekunowie i kierowca. Ile osób wyjechało na wycieczkę?

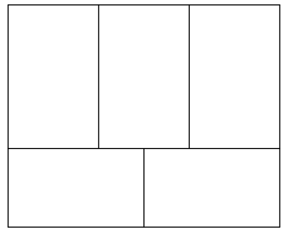
Rozwiązanie:
x- liczba osób w autokarze,
0,55 x - liczba dziewczynek,
0,325 x - liczba chłopców
5 - kierowca plus liczba opiekunów

$$x = 0,325x + 0,55x + 5$$

$$0,125x = 5$$

$$x = 40$$

Zadanie 4. Prostokąt o obwodzie 66 cm podzielono na pięć mniejszych identycznych prostokątów tak jak na rysunku. Ile wynosi obwód mniejszego prostokąta?

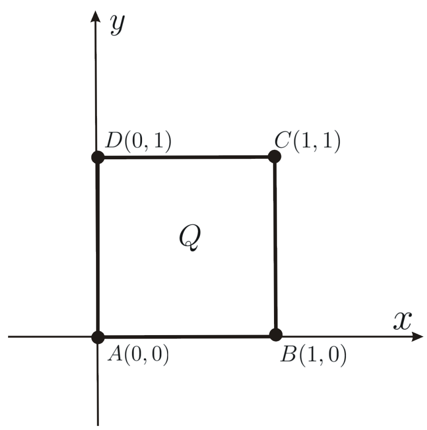


Rozwiązanie: Oznaczmy długość krótszego boku małego prostokąta przez a, zaś dłuższego przez b. Z rysunku widać, że $3a = 2b$. Dodatkowo, z treści zadania wynika, że $2(a+b)+2\cdot 2b = 66$, zatem do rozwiązania mamy następujący układ równań :

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}b, \\ a + b + 2b = 33, \end{cases}$$

skąd dostajemy, że $a = 6, b = 9$. Ostatecznie obwód małego prostokąta wynosi 30.

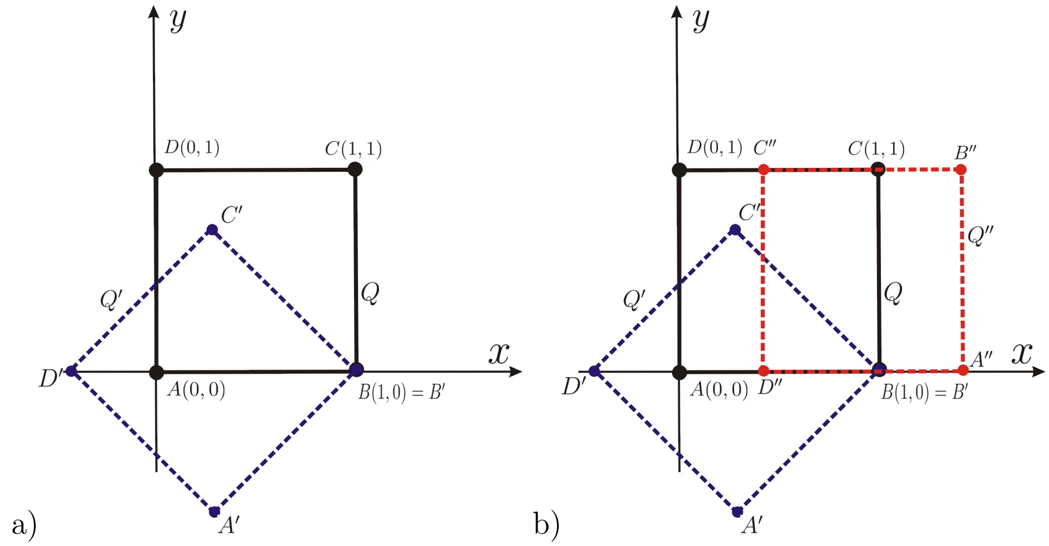
Zadanie 5. Niech punkty $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ i $D(0,1)$ będą wierzchołkami kwadratu Q o boku 1.



Obracamy kwadrat Q o 45 stopni wokół punktu $B(1,0)$, przeciwko ruchowi wskazówek zegara, i otrzymujemy kwadrat Q'. Następnie obracamy kwadrat Q' o 45 stopni wokół punktu $D(0,1)$, też przeciwko ruchowi wskazówek zegara, i otrzymujemy kwadrat Q''. (Tym razem środek obrotu $D(0,1)$ nie jest wierzchołkiem kwadratu Q'.)

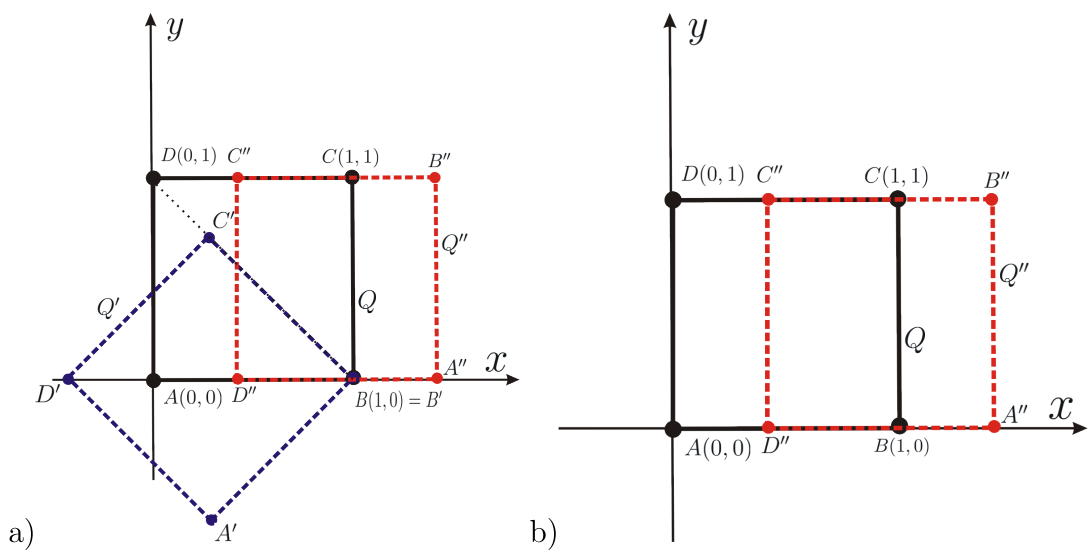
Porównując kwadraty Q i Q'', stwierdzamy że jeden z punktów wnętrza kwadratu Q powrócił na swoje miejsce. Podaj współrzędne tego punktu.

Rozwiązanie: Zgodnie z treścią zadania najpierw obracamy kwadrat Q wokół wierzchołka B o kąt 45 stopni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara otrzymując kwadrat Q'- niebieski (patrz rysunek 1a). Następnie kwadrat niebieski Q' obracamy o 45 stopni wokół punktu $D(0,1)$, też przeciwko ruchowi wskazówek zegara, i otrzymujemy kwadrat Q''−czerwony (patrz rysunek 1b).



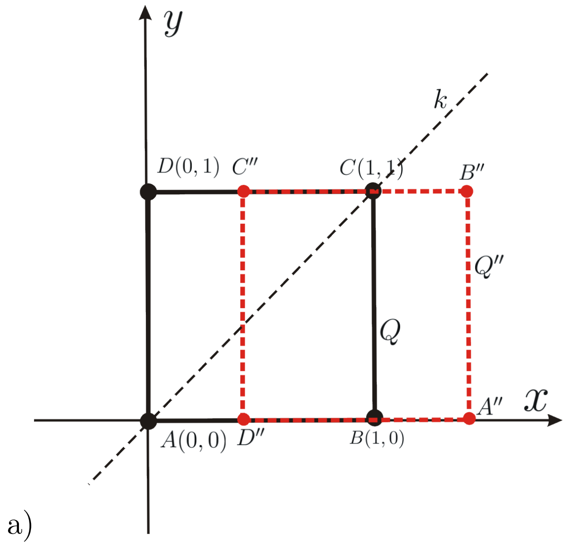
Rysunek 1:

Zauważmy że punkt C' leży na przekątnej BD kwadratu Q oraz odległość $|DC'| = \sqrt{2} - 1$. Zatem współrzędne punktu $C''(\sqrt{2} - 1, 1)$ (patrz rysunek 2). W celu wyznaczenia punktu, który powrócił na swoje miejsce rozważamy kwadraty Q i Q''.



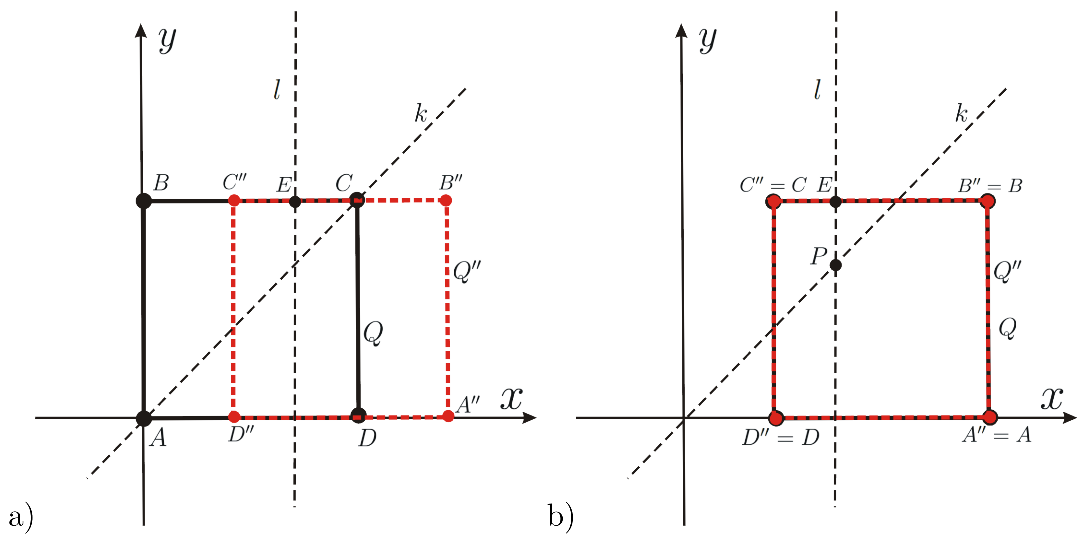
Rysunek 2:

Dokonamy przekształcenia kwadratu Q do Q'' tym razem za pomocą dwóch symetrii osiowych względem pewnych prostych. Pierwsze z nich jest to odbicie względem prostej k będącej przekątną AC (patrz rysunek 3a). W rezultacie dostajemy czarny kwadrat taki jak na rysunku 3b). Zauważmy ponadto, że prosta k ma równanie $y = x$.



Rysunek 3:

Drugim jest odbicie nowego kwadratu Q względem prostej l (patrz rysunek 4a) będącej symetralną odcinka CC'' dzięki czemu odpowiednie wierzchołki kwadratu Q pokryją się z odpowiednimi wierzchołkami kwadratu Q'' (patrz rysunek 4b).



Rysunek 4:

Ponadto widzimy, że jedynym punktem, który nie zmienił swojego położenia jest punkt P na przecięciu prostej k z prostą l. W celu wyznaczenia jego współrzędnych znajdziemy najpierw współrzędne punktu E będącego przecięciem prostej k z odcinkiem CC''. Ze średniej arytmetycznej dla pierwszych współrzędnych (lub długości odpowiednich odcinków):

$$x_E = \frac{x_{C''} + x_C}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1 + 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wówczas $E = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$. Stąd oraz z faktu, że prosta k ma równanie $y = x$ współrzędne punktu P to:

$$P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$