Zadanie 1

Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p takie, że $2p+1$ i $4p+1$ też są liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie:

Niech p będzie liczbą pierwszą taką, że $2p+1$ i $4p+1$ też są liczbami pierwszymi. Zauważmy, że z trzech kolejnych liczb $4p$, $4p+1$ i $4p+2$ jedna jest podzielna przez 3. Ponieważ liczby p, $4p+1$ i $2p+1$ są pierwsze, to:

a) jeśli liczba $4p$ jest podzielna przez 3, to 3 dzieli p i stąd $p=3$;

b) jeśli liczba $4p+1$ jest podzielna przez 3, to $4p+1=3$, co jest niemożliwe ;

c) jeśli liczba $4p+2=2(2p+1)$ jest podzielna przez 3, to $2p+1=3$, co jest niemożliwe.

Odpowiedź:

Jedyną taką liczbą jest 3.

Zadanie 2

Pociąg o długości d jedzie ze stałą prędkością. Całkowity czas przejazdu pociągu (tzn. od momentu wjazdu początku lokomotywy do wyjazdu końca ostatniego wagonu) przez 85 metrowy tunel wynosi 5 sekund, a całkowity przejazd przez 160 metrowy tunel - 8 sekund. Jaka jest długość pociągu?

Rozwiązanie:

Pociąg pokonuje drogę $85+d$ metrów w przeciągu 5 sekund i drogę $160+d$ metrów w przeciągu 8 sekund. Zatem pociąg pokonuje drogę

$$160+d \;-\; 85+d \;=\; 160-85=75$$

metrów w przeciągu $8-5=3$ sekund. Czyli prędkość pociągu to $25\ m/s$. Zatem

$$85+d=5\cdot 25$$

Stąd

$$d=40.$$

Odpowiedź:

Długość pociągu wynosi 40 metrów.

Zadanie 3

Pięciocyfrowa liczba $x679y$ jest wielokrotnością liczby 72. Jakie są wartości cyfr x i y ?

Rozwiązanie:

Ponieważ $72 = 8 \cdot 9$, to każda liczba, która jest wielokrotnością 72, jest wielokrotnością zarówno 8 jak i 9. I odwrotnie, ponieważ 8 i 9 nie maja wspólnych dzielników poza 1, to każda liczba, która jest jednocześnie wielokrotnością 8 i 9, musi być także wielokrotnością $72 = 8 \cdot 9$.

Liczba jest wielokrotnością 8 wtedy i tylko wtedy, gdy jej trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę będącą wielokrotnością 8. Zatem $79y$ jest wielokrotnością 8 . Ponieważ 800 jest wielokrotnością 8, to jedyna liczba, która może się tutaj pojawić to 792 , czyli $y = 2$.

Liczba jest wielokrotnością 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest wielokrotnością 9 . Zatem $x + 6 + 7 + 9 + y$ jest wielokrotnością 9. Ponieważ $y = 2$, to $x + 24$ musi być wielokrotnością 9, czyli $x = 3$.

Odpowiedź:

Poszukiwane cyfry, to $x = 3$ i $y = 2$.

Zadanie 4

W jednym rzędzie ustawiono do zdjęcia chłopców i dziewczynki. Każda dziewczynka liczy ilu chłopców znajduje się na lewo od niej, natomiast każdy z chłopców oblicza ile dziewczynek znajduje się na prawo od niego. Niech D oznacza sumę wszystkich wyników podanych przez dziewczynki, a C sumę wszystkich wyników podanych przez chłopców. Uzasadnij, że $D = C,$ przeprowadzając możliwie dokładne rozumowanie.

Rozwiązanie:

Weźmy jedną z dziewczynek. Dla każdego chłopca stojącego na lewo od tej dziewczynki rysujemy łuk łączący ją z tym chłopcem. Jeden taki łuk odpowiada jednemu chłopcu, którego dziewczynka musi policzyć. Procedurę powtarzamy dla każdej z dziewczynek. Narysujemy w ten sposób łącznie D łuków.

Analogiczną procedurę rozpoczynamy dla chłopców. Widzimy, że łuki rysowane dla chłopców są dokładnie tymi samymi, które należało wcześniej narysować dla dziewczynek. Zatem $D = C$.

Zadanie 5

W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A, B, C (oznaczone odpowiednio $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$) spełniają równości:

$$\sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle B = 4 \cdot \sphericalangle C \ .$$

Dwusieczne kątów trójkąta przecinają przeciwległe boki odpowiednio w punktach D, E, F . Pokaz, że:

$$DE = DF \ .$$

Rozwiązanie:

Niech I oznacza środek okręgu wpisanego. Wprowadźmy oznaczenie:

$$\sphericalangle BCI = \sphericalangle ACI = \alpha$$

(bo środek okręgu wpisanego leży na przecięciu się dwusiecznych). Z warunków zadania mamy

$$\sphericalangle ABI = \sphericalangle CBI = 2\alpha$$

oraz

$$\sphericalangle CAI = \sphericalangle BAI = 4\alpha \ .$$

Z trójkąta ABE wyznaczamy

$$\sphericalangle AEI = 180° - 2\alpha - 8\alpha = 180° - 10\alpha \ ,$$

a wobec tego

$$\sphericalangle AIE = 180° - \ \ 180° - 10\alpha \ \ - 4\alpha = 6\alpha \ .$$

Mamy

$$\sphericalangle AIE = \sphericalangle BDI = \sphericalangle BID = 6\alpha \ .$$

Analogicznie

$$\sphericalangle AIF = \sphericalangle AFI = 5\alpha$$

oraz

$$\sphericalangle AEI = 4\alpha \ .$$

Z wyznaczonych wartości kątów widzimy, że

$$BD = BI \quad \text{i} \quad AF = AI = EI \ .$$

Oznaczmy

$$AI = x \quad \text{i} \quad DI = y \ .$$

Wówczas

$$AF = IE = x \quad \text{i} \quad BD = BI = x + y \ .$$

W trójkącie BAD mamy:

$$\frac{AB}{AI} = \frac{DB}{DI}$$

i stąd

$$BF = \ \frac{DB}{DI} - \frac{AF}{AI} \ \cdot AI = \frac{x^2}{y}$$

W trójkącie ABE mamy:

$$\frac{EA}{EI} = \frac{BA}{BI}$$

i stąd

$$AE = \ \frac{AF + FB}{BI} \ \cdot EI = \frac{x^2}{y} = BF$$

Zatem trójkąty EAD i FBD są przystające i stąd:

$$DE = DF \ .$$