VIII Warmińsko–Mazurskie Zawody Matematyczne

Szkoła podstawowa

13 maja 2010r.

Zadanie 1.

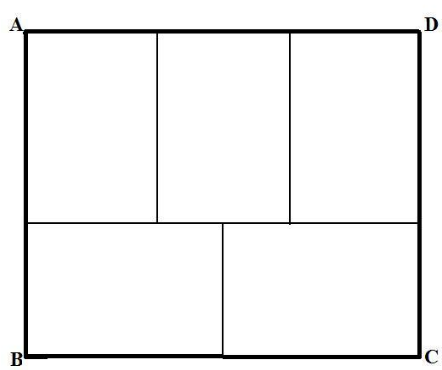
W pewnej szkole, począwszy od 2010 roku, organizowane są: co dwa lata turniej koszykówki, co trzy lata turniej siatkówki, a co pięć lat turniej piłki nożnej. W którym roku, przed upływem 2099 roku, odbędą się po raz ostatni jednocześnie wszystkie trzy imprezy?

Rozwiązanie.

- Turniej koszykówki odbywa się co 2 lata
- Turniej siatkówki odbywa się co 3 lata
- Turniej piłki nożnej odbywa się co 5 lat
- Wszystkie turnieje odbywają się po raz pierwszy w 2010 roku
- Wszystkie trzy imprezy po raz kolejny odbędą się jednocześnie po upływie lat, których liczba jest wielokrotnością jednocześnie liczb: 2,3 i 5. Najwcześniejsza impreza odbędzie się po $NWW(2,3,5) = 30$ latach, tzn. w 2040 roku.
- Kolejne lata jednoczesnego przeprowadzenia trzech turniejów: 2070, 2100, 2130, itd.
- Wszystkie trzy imprezy odbędą się jednocześnie, po raz ostatni przed upływem 2099 roku, w 2070 roku.

Zadanie 2.

Prostokąt $ABCD$ tworzy pięć mniejszych, identycznych prostokątów takich, jak na poniższym rysunku. Obliczyć obwód prostokąta $ABCD$, jeśli jego pole jest równe $6750\,\mathrm{cm}^2$.

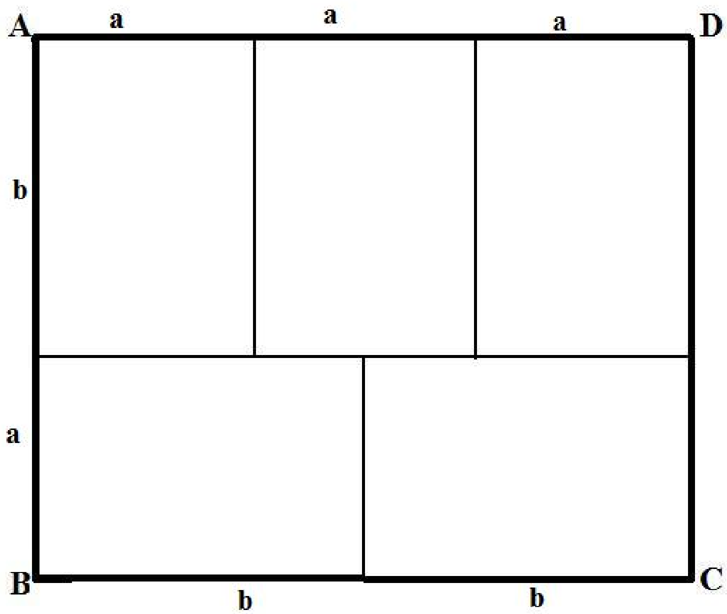


Rozwiązanie.

Niech a i b oznaczają długości, odpowiednio, krótszego i dłuższego boku mniejszego prostokąta. Ponieważ pole prostokąta $ABCD$ jest równe sumie pól pięciu, identycznych, mniejszych prostokątów, więc pole jednego mniejszego prostokąta jest równe, w cm^2,

$$\frac{1}{5} \cdot 6750 = 1350.$$

Ponieważ



$$3a = 2b,$$

więc

$$b = \frac{3}{2}a.$$

Wynika stąd, że

$$a \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}a^2 = 1350,$$

czyli

$$3a^2 = 2700.$$

Zatem

$$a^2 = 900,$$

skąd wynika, że

$$a = 30 \qquad \text{oraz} \qquad b = \frac{3}{2} \cdot 30 = 45.$$

Obwód prostokąta $ABCD$, w centymetrach, jest równy

$$5a + 4b = 5 \cdot 30 + 4 \cdot 45 = 150 + 180 = 330.$$

Zadanie 3.

Janek przeczytał książkę liczącą 200 stron. Ołówkiem zaznaczał numery każdej nieparzystej strony. Dodał cyfry wszystkich zaznaczonych liczb. Jaką sumę otrzymał?

Rozwiązanie.

Książka licząca 200 stron ma 100 stron o numerach nieparzystych. Należy zatem znaleźć sumę cyfr pierwszych 100 nieparzystych liczb naturalnych.

- Suma cyfr w rzędzie jedności:

  1. cyfra 1 pojawia się w rzędzie jedności 20 razy w liczbach: $1, 11, 21, \ldots, 91, 101, 111, 121, \ldots, 191$,
  2. cyfra 3 pojawia się w rzędzie jedności 20 razy w liczbach: $3, 13, 23, \ldots, 93, 103, 113, 123, \ldots, 193$,
  3. cyfra 5 pojawia się w rzędzie jedności 20 razy w liczbach: $5, 15, 25, \ldots, 95, 105, 115, 125, \ldots, 195$,
  4. cyfra 7 pojawia się w rzędzie jedności 20 razy w liczbach: $7, 17, 27, \ldots, 97, 107, 117, 127, \ldots, 197$,
  5. cyfra 9 pojawia się w rzędzie jedności 20 razy w liczbach: $9, 19, 29, \ldots, 99, 109, 119, 129, \ldots, 199$.

  Zatem suma cyfr w rzędzie jedności we wszystkich rozważanych liczbach jest równa

  $$20 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 20 \cdot 7 + 20 \cdot 9 = 500.$$

- Suma cyfr w rzędzie dziesiątek:

  – cyfra 0 pojawia się w rzędzie dziesiątek 5 razy w liczbach: 101, 103, 105, 107, 109,

  – cyfra 1 pojawia się w rzędzie dziesiątek 10 razy w liczbach: 11, 13, 15, 17, 19 oraz w liczbach 111, 113, 115, 117, 119,

  – cyfra 2 pojawia się w rzędzie dziesiątek 10 razy w liczbach: 21, 23, 25, 27, 29 oraz w liczbach 121, 123, 125, 127, 129,

  – cyfra 3 pojawia się w rzędzie dziesiątek 10 razy w liczbach: 31, 33, 35, 37, 39 oraz w liczbach 131, 133, 135, 137, 139,

  $\vdots$

  – cyfra 9 pojawia się w rzędzie dziesiątek 10 razy w liczbach: 91, 93, 95, 97, 99 oraz w liczbach 191, 193, 195, 197, 199.

Zatem suma cyfr w rzędzie dziesiątek we wszystkich rozważanych liczbach jest równa

$$5{\cdot}0+10{\cdot}1+10{\cdot}2+10{\cdot}3+10{\cdot}4+10{\cdot}5+10{\cdot}6+10{\cdot}7+10{\cdot}8+10{\cdot}9 = 10+20+30+40+50+60+70+80+90 = 450.$$

- Suma cyfr w rzędzie setek:
  - cyfra 1 pojawia się w rzędzie setek we wszystkich liczbach trzycyfrowych, tzn. 50 razy w liczbach: 101, 103, 105, 107, 109, . . . , 191, 193, 195, 197, 199.

  Zatem suma cyfr w rzędzie setek we wszystkich rozważanych liczbach jest równa

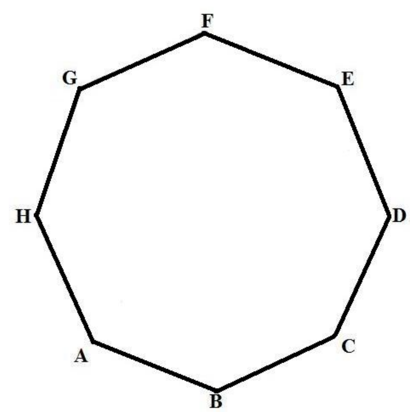
$$50 \cdot 1 = 50.$$

Suma cyfr wszystkich rozważanych liczb, tzn. suma cyfr wszystkich numerów stron zaznaczonych w książce przez Janka jest równa:

$$500 + 450 + 50 = 1000.$$

Zadanie 4.

Wewnątrz ośmiokąta foremnego $ABCDEFGH$ obrano punkt I w taki sposób, że trójkąt ABI jest równoboczny. Oblicz miarę kąta wypukłego BIH.



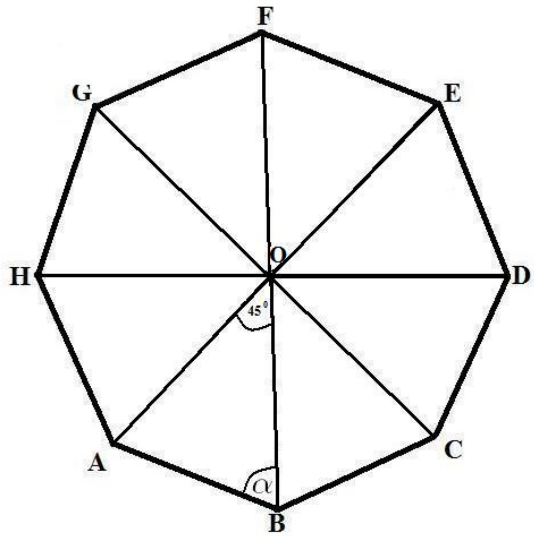
Rozwiązanie.

- Obliczenie miary kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego.
  - Ośmiokąt można podzielić na 8 trójkątów równoramiennych - dwa wierzchołki każdego tójkąta są sąsiednimi wierzchołkami ośmiokąta, zaś trzeci wierzchołek jest środkiem ośmiokąta.
  - Suma miar wszystkich ośmiu kątów wewnętrznych trójkątów o wierzchołku O jest równa 360°.
  - Każdy z kątów trójkątów o wierzchołku O ma miarę

$$360^\circ : 8 = 45^\circ.$$

  - Miara α kąta $\angle ABO$ jest równa

$$\frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{2}135^\circ = 67,5^\circ.$$

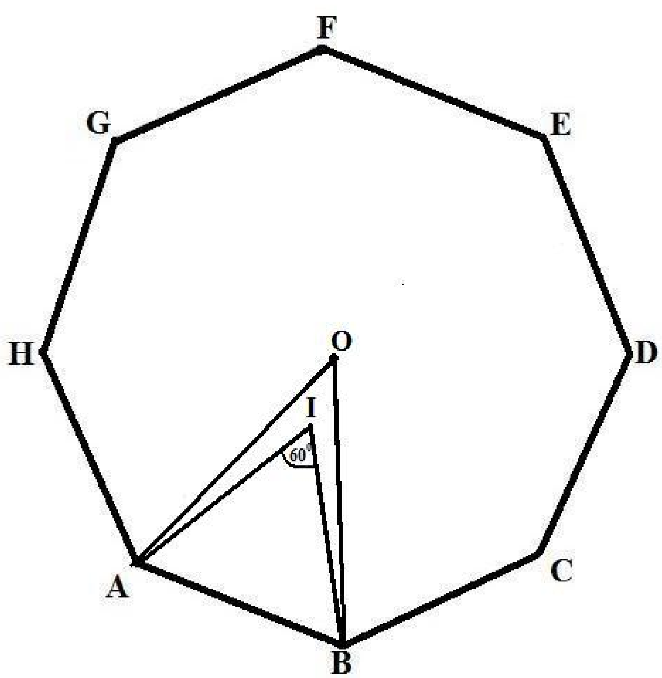


– Kąt wewnętrzny ośmiokąta ma miarę

$$2 \cdot 67,5^\circ = 135^\circ.$$

- Ustalenie położenia punktu I.

  – Kąt wewnętrzny każdego z ośmiu identycznych trójkątów o wierzchołku O ma miarę 45°,



  – Każdy z kątów trójkąta równobocznego ma miarę 60°,

  – Zatem punkt I znajduje się wewnątrz trójkąta $\triangle ABO$.

- Obliczenie miary kąta wypukłego $\angle BIH$

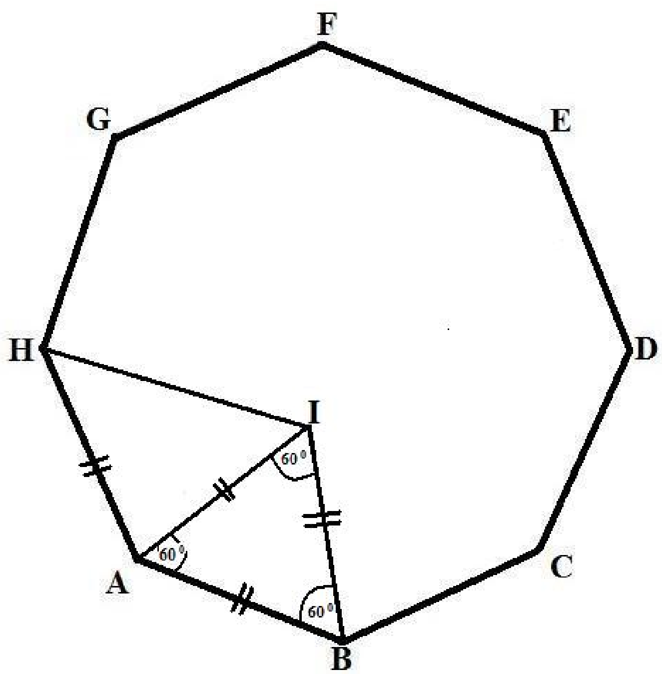
– Miara każdego kąta wewnętrznego $\triangle ABI$ jest równa $60°$.

– Trójkąt $\triangle HAI$ jest równoramienny: długość boku HA jest równa długości boku AI. Wynika stąd, że $\angle HAI$ ma miarę równą różnicy miar kąta wewnętrznego ośmiokąta oraz miary kąta wewnętrznego trójkąta $\triangle ABI$, tzn.

$$135° - 60° = 75°.$$

– Miara kąta $\angle HIA$ jest równa

$$\frac{1}{2}(180° - 75°) = 52{,}5°.$$



– Kąt wypukły $\angle BIH$ ma miarę równą sumie miar $\angle AIB$ oraz $\angle HIA$, czyli

$$52{,}5° + 60° = 112{,}5°.$$

Zadanie 5.

Liczby w I i II rzędzie wypisano według tej samej reguły. Następnie zakryto drugą, trzecią i czwartą liczbę w II rzędzie. Znajdź brakujące liczby:

I rząd	3	4	7	11	18
II rząd	8	□	□	□	52

Rozwiązanie.

- Ustalenie reguły zapisu liczb:

  Zauważmy, że w I rzędzie trzecia liczba jest sumą pierwszej i drugiej, czwarta jest sumą drugiej i trzeciej, a piąta jest sumą trzeciej i czwartej.

- Wyznaczenie zakrytych liczb w II rzędzie.

  Oznaczmy drugą liczbę przez a. Wówczas, zgodnie z regułą, mamy:

  – trzecia liczba : $8 + a$,

  – czwarta liczba : $a + 8 + a = 2a + 8$,

  – piąta liczba : $8 + a + 2a + 8 = 16 + 3a$.

  Ponieważ piąta liczba jest równa 52, więc

$$16 + 3a = 52.$$

  Wynika stąd, że $a = 12$. Zatem

II rząd 8 12 20 32 52