Warmińsko – Mazurskie Zawody Matematyczne

Kategoria: szkoła ponadgimnazjalna

Eliminacje

Zadanie 1

Napisać równanie kwadratowe o współczynnikach całkowitych którego pierwiastkami są liczby:

$$x_1 = (3-\sqrt{7})^{-1} \text{ i } x_2 = (3+\sqrt{7})^{-1}$$

Rozwiązanie:

$$x_1 * x_2 = (3-\sqrt{7})^{-1} * (3+\sqrt{7})^{-1} = \frac{1}{(3-\sqrt{7})} * \frac{1}{(3+\sqrt{7})} = \frac{1}{9-7} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 + x_2 = (3-\sqrt{7})^{-1} + (3+\sqrt{7})^{-1} = \frac{1}{(3-\sqrt{7})} + \frac{1}{(3+\sqrt{7})} = \frac{(3-\sqrt{7}) + (3+\sqrt{7})}{9-7} = \frac{6}{2} = 3$$

Zatem:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 => 2x^2 - 6x + 1 = 0$$

Zadanie 2

Obliczyć $f\left(f\left(f(2013)\right)\right)$,jeżeli:

$$f(x) = \frac{1}{1-\mathrm{x}}.$$

Rozwiązanie:

Dla $x \neq 1$, mamy $f\left(f(x)\right) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}, x \neq 0, x \neq 1.$

Zatem, $f\left[f\left(f(x)\right)\right] = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x, dla\ x \neq 0, x \neq 1.$

Wobec tego: $f\left(f\left(f(2013)\right)\right)$=2013.

Zadanie 3

Znaleźć wszystkie pary liczb w których każda jest kwadratem pewnej liczby naturalnej i jedna jest większa o 63 od drugiej.

Rozwiązanie:

Oznaczmy: $x = n^2, y = m^2, n\ i\ m \in N, n > m.$

Zatem: $x = y + 63$, czyli $n^2 = m^2 + 63$, a więc $n^2 - m^2 = 63.$

Zachodzi więc równość: $(n-m)(n+m)=63$.

Lewa strona jest iloczynem dwóch liczb naturalnych, z których pierwszy czynnik jest mniejszy od drugiego. Zapiszmy więc prawą stronę wzoru jako iloczyn dwóch liczb naturalnych. Można to zrobić na 3 sposoby:

$$63 = 1 * 63 = 3 * 21 = 7 * 9.$$

Zatem otrzymujemy 3 możliwości:

1. $\begin{cases} n-m=1 \\ n+m=63 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} n-m=3 \\ n+m=21 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} n-m=7 \\ n+m=9 \end{cases}$

1. $n=32, m=31,\quad x=n^2, y=m^2, x=32^2=1024, y=31^2=961$
2. $n=12, m=9,\quad x=n^2, y=m^2, x=12^2=144, y=9^2=81$
3. $n=8, m=1,\quad x=n^2, y=m^2, x=8^2=64, y=1^2=1$

Odpowiedź:

są 3 takie pary liczb: 64 i 1, 144 i 81, 1024 i 961.

Zadanie 4

Obliczyć stosunek promienia okręgu opisanego na trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, jeżeli długości boków trójkąta spełniają warunek:

$$a:b:c = 5:8:9.$$

Oznaczmy boki trójkąta jako:

$a=5x, b=8x, c=9x.$

R – promień okręgu opisanego na trójkącie

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt

S – pole trójkąta

$R=\frac{abc}{4S},\ r=\frac{S}{p},\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

Obliczamy:

$$\frac{R}{r}=\frac{abc}{4S}*\frac{p}{S}=\frac{p*abc}{4S^2}=\frac{p*abc}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{5x*8x*9x}{4*6x*3x*2x}=\frac{5*8*9}{4*6+3*2}=\frac{5}{2}.$$

Zadanie 5

Na tej samej podstawie zbudowano dwa stożki obrotowe, jeden wewnątrz drugiego. Kąty rozwarcia stożków mają miary 2α i 2 β. Różnica długości wysokości tych stożków jest równa d. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami bocznymi tych stożków.

Rozwiązanie:

V_1 – Objętość większego stożka,

V_2 – Objętość mniejszego stożka,

r – promień podstawy stożka,

h – wysokość mniejszego stożka,

d – różnica pomiędzy wysokościami stożków.

Do obliczenia: $V = V_1 - V_2$.

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2(d+h) - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 d.$$

$$tg\alpha = \frac{r}{h}, tg\beta = \frac{r}{h+d},$$
$$h = \frac{r}{tg\alpha},$$
$$tg\beta\left(\frac{r}{tg\alpha} + d\right) = r,$$
$$r * tg\beta + d * tg\alpha * tg\beta = r * tg\alpha,$$
$$r = \frac{d * tg\alpha * tg\beta}{tg\alpha - tg\beta} => V = \frac{1}{3}\pi \frac{tg\alpha^2 * tg\beta^2}{(tg\alpha - tg\beta)^2} d^3.$$