O składaniu symetrii i obrotów. Punkty stałe izometrii.

dr Krzysztof Żyjewski

Wydział Matematyki I Informatyki UWM

21 kwietnia 2016

Izometria

Definicja (izometria)

Izometrią nazywamy odwzorowanie $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *przekształcające płaszczyznę* π *na płaszczyznę* π *oraz zachowujące odległość tzn.:*

$$\forall_{A,B\in\pi} \ \ |I(A)I(B)| = |AB|.$$

Izometria

Definicja (izometria)

Izometrią nazywamy odwzorowanie $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ przekształcające płaszczyznę π na płaszczyznę π oraz zachowujące odległość tzn.:

$$\forall_{A,B\in\pi} \ |I(A)I(B)| = |AB|.$$

Twierdzenie (podstawowe własności izometrii)

a) *izometria przeprowadza odcinek na odcinek;*

Izometria

Definicja (izometria)

Izometrią nazywamy odwzorowanie $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *przekształcające płaszczyznę* π *na płaszczyznę* π *oraz zachowujące odległość tzn.:*

$$\forall_{A,B\in\pi} \ |I(A)I(B)| = |AB|.$$

Twierdzenie (podstawowe własności izometrii)

a) *izometria przeprowadza odcinek na odcinek;*

b) *izometria przeprowadza prostą na prostą;*

Izometria

Definicja (izometria)

Izometrią nazywamy odwzorowanie $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ przekształcające płaszczyznę π na płaszczyznę π oraz zachowujące odległość tzn.:

$$\forall_{A,B\in\pi} \ |I(A)I(B)| = |AB|.$$

Twierdzenie (podstawowe własności izometrii)

a) *izometria przeprowadza odcinek na odcinek;*
b) *izometria przeprowadza prostą na prostą;*
c) *izometria przeprowadza proste prostopadłe na proste prostopadłe.*

dowód:

Izometria

Definicja (izometria)

Izometrią nazywamy odwzorowanie $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *przekształcające płaszczyznę* π *na płaszczyznę* π *oraz zachowujące odległość tzn.:*

$$\forall_{A,B\in\pi} \ \ |I(A)I(B)| = |AB|.$$

Twierdzenie (podstawowe własności izometrii)

a) *izometria przeprowadza odcinek na odcinek;*

b) *izometria przeprowadza prostą na prostą;*

c) *izometria przeprowadza proste prostopadłe na proste prostopadłe.*

dowód: a) Niech $A, B \in \pi$. Rozważmy odcinek AB. Pokażemy, że izometria I przekształca go na odcinek przystający $I(A)I(B)$.

Izometria

Definicja (izometria)

Izometrią nazywamy odwzorowanie $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *przekształcające płaszczyznę* π *na płaszczyznę* π *oraz zachowujące odległość tzn.:*

$$\forall_{A,B\in\pi} \ |I(A)I(B)| = |AB|.$$

Twierdzenie (podstawowe własności izometrii)

a) *izometria przeprowadza odcinek na odcinek;*

b) *izometria przeprowadza prostą na prostą;*

c) *izometria przeprowadza proste prostopadłe na proste prostopadłe.*

dowód: a) Niech $A, B \in \pi$. Rozważmy odcinek AB. Pokażemy, że izometria I przekształca go na odcinek przystający $I(A)I(B)$. Z definicji izometrii mamy, że $|I(A)I(B)| = |AB|$. Wybieramy dowolny punkt $C \in AB$.

Izometria

Definicja (izometria)

Izometrią nazywamy odwzorowanie $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *przekształcające płaszczyznę* π *na płaszczyznę* π *oraz zachowujące odległość tzn.:*

$$\forall_{A,B\in\pi} \;\; |I(A)I(B)| = |AB|.$$

Twierdzenie (podstawowe własności izometrii)

a) *izometria przeprowadza odcinek na odcinek;*

b) *izometria przeprowadza prostą na prostą;*

c) *izometria przeprowadza proste prostopadłe na proste prostopadłe.*

<u>**dowód:**</u> a) Niech $A, B \in \pi$. Rozważmy odcinek AB. Pokażemy, że izometria I przekształca go na odcinek przystający $I(A)I(B)$. Z definicji izometrii mamy, że $|I(A)I(B)| = |AB|$. Wybieramy dowolny punkt $C \in AB$. Wówczas $|I(A)I(B)| = |AB| = |AC| + |CB| = |I(A)I(C)| + |I(C)I(B)|$. Co oznacza, że $I(C) \in I(A)I(B)$. Ponadto mamy, że $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|I(A)I(C)|}{|I(C)I(B)|}$.

b) wynika z dowodu własności a).

c) Niech proste $k, m \in \pi$ będą prostopadłe ($k \perp m$). Zatem (znajdujemy się na płaszczyźnie) istnieje punkt $A \in \pi$, spełniający warunek $k \cap m = \{A\}$. Niech ponadto $I(k) = k'$ oraz $I(m) = m'$.

b) wynika z dowodu własności a).

c) Niech proste $k, m \in \pi$ będą prostopadłe ($k \perp m$). Zatem (znajdujemy się na płaszczyźnie) istnieje punkt $A \in \pi$, spełniający warunek $k \cap m = \{A\}$. Niech ponadto $I(k) = k'$ oraz $I(m) = m'$.

Wybierzmy punkty B, C takie, że $B \in k$, $C \in m$. Wówczas $\triangle ACB$ jest prostokątny, więc $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$.

b) wynika z dowodu własności a).

c) Niech proste $k, m \in \pi$ będą prostopadłe ($k \perp m$). Zatem (znajdujemy się na płaszczyźnie) istnieje punkt $A \in \pi$, spełniający warunek $k \cap m = \{A\}$. Niech ponadto $I(k) = k'$ oraz $I(m) = m'$.

Wybierzmy punkty B, C takie, że $B \in k$, $C \in m$. Wówczas $\triangle ACB$ jest prostokątny, więc $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$.

Stąd i z faktu, że I jest izometrią, mamy natomiast $|I(B)I(C)|^2 = |I(A)I(C)|^2 + |I(A)I(B)|^2$, co oznacza, że $\triangle I(A)I(C)I(B)$ jest prostokątny.

b) wynika z dowodu własności a).

c) Niech proste $k, m \in \pi$ będą prostopadłe ($k \perp m$). Zatem (znajdujemy się na płaszczyźnie) istnieje punkt $A \in \pi$, spełniający warunek $k \cap m = \{A\}$. Niech ponadto $I(k) = k'$ oraz $I(m) = m'$.

Wybierzmy punkty B, C takie, że $B \in k$, $C \in m$. Wówczas $\triangle ACB$ jest prostokątny, więc $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$.

Stąd i z faktu, że I jest izometrią, mamy natomiast $|I(B)I(C)|^2 = |I(A)I(C)|^2 + |I(A)I(B)|^2$, co oznacza, że $\triangle I(A)I(C)I(B)$ jest prostokątny.

Zatem oraz na podstawie $I(A) \in k' \cap m'$ i $I(B) \in k'$, $I(C) \in m'$ otrzymujemy $k' \perp m'$.

b) wynika z dowodu własności a).

c) Niech proste $k, m \in \pi$ będą prostopadłe ($k \perp m$). Zatem (znajdujemy się na płaszczyźnie) istnieje punkt $A \in \pi$, spełniający warunek $k \cap m = \{A\}$. Niech ponadto $I(k) = k'$ oraz $I(m) = m'$.

Wybierzmy punkty B, C takie, że $B \in k$, $C \in m$. Wówczas $\triangle ACB$ jest prostokątny, więc $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$.

Stąd i z faktu, że I jest izometrią, mamy natomiast $|I(B)I(C)|^2 = |I(A)I(C)|^2 + |I(A)I(B)|^2$, co oznacza, że $\triangle I(A)I(C)I(B)$ jest prostokątny.

Zatem oraz na podstawie $I(A) \in k' \cap m'$ i $I(B) \in k'$, $I(C) \in m'$ otrzymujemy $k' \perp m'$.

Twierdzenie

Przekształcenia tożsamościowe, przesunięcia, symetrie środkowe i osiowe są izometriami.

Definicja

Niech odwzorowanie $I : X \to Y$, *gdzie* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$. *Będziemy mówić, że przekształcenie* I *jest:*

- *jednoznaczne wtedy i tylko wtedy, gdy dla jednego elementu* $x \in X$ *istnieje tylko jeden element* $y \in Y$, *taki że* $I(x) = y$;

Definicja

Niech odwzorowanie $I : X \to Y$*, gdzie* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$*. Będziemy mówić, że przekształcenie* I *jest:*

- *jednoznaczne wtedy i tylko wtedy, gdy dla jednego elementu* $x \in X$ *istnieje tylko jeden element* $y \in Y$*, taki że* $I(x) = y$*;*
- *różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych* $x, x' \in X$ *z faktu, że* $I(x) = I(x')$ *wynika* $x = x'$*;*

Definicja

Niech odwzorowanie $I : X \to Y$, gdzie $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$. Będziemy mówić, że przekształcenie I jest:

- *jednoznaczne wtedy i tylko wtedy, gdy dla jednego elementu $x \in X$ istnieje tylko jeden element $y \in Y$, taki że $I(x) = y$;*
- *różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, x' \in X$ z faktu, że $I(x) = I(x')$ wynika $x = x'$;*
- *"na" wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu $y \in Y$ istnieje element $x \in X$, że $I(x) = y$.*

Definicja

Niech odwzorowanie $I : X \to Y$*, gdzie* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$*. Będziemy mówić, że przekształcenie* I *jest:*

- *jednoznaczne wtedy i tylko wtedy, gdy dla jednego elementu* $x \in X$ *istnieje tylko jeden element* $y \in Y$*, taki że* $I(x) = y$*;*
- *różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych* $x, x' \in X$ *z faktu, że* $I(x) = I(x')$ *wynika* $x = x'$*;*
- *"na" wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu* $y \in Y$ *istnieje element* $x \in X$*, że* $I(x) = y$*.*

Definicja

Odwzorowanie:

- *jednoznaczne i różnowartościowe nazywamy iniekcją;*

Definicja

Niech odwzorowanie $I : X \to Y$, *gdzie* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$. *Będziemy mówić, że przekształcenie* I *jest:*

- *jednoznaczne wtedy i tylko wtedy, gdy dla jednego elementu* $x \in X$ *istnieje tylko jeden element* $y \in Y$, *taki że* $I(x) = y$;
- *różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych* $x, x' \in X$ *z faktu, że* $I(x) = I(x')$ *wynika* $x = x'$;
- *"na" wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu* $y \in Y$ *istnieje element* $x \in X$, *że* $I(x) = y$.

Definicja

Odwzorowanie:

- *jednoznaczne i różnowartościowe nazywamy iniekcją;*
- *jednoznaczne i "na" nazywamy suriekcją;*

Definicja

Niech odwzorowanie $I : X \to Y$, *gdzie* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$. *Będziemy mówić, że przekształcenie* I *jest:*

- *jednoznaczne wtedy i tylko wtedy, gdy dla jednego elementu* $x \in X$ *istnieje tylko jeden element* $y \in Y$, *taki że* $I(x) = y$;
- *różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych* $x, x' \in X$ *z faktu, że* $I(x) = I(x')$ *wynika* $x = x'$;
- *"na" wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu* $y \in Y$ *istnieje element* $x \in X$, *że* $I(x) = y$.

Definicja

Odwzorowanie:

- *jednoznaczne i różnowartościowe nazywamy iniekcją;*
- *jednoznaczne i "na" nazywamy suriekcją;*
- *będące jednocześnie iniekcją i suriekcją nazywamy bijekcją (inaczej przekształceniem wzajemnie jednoznacznym).*

Twierdzenie

Izometrie to odwzorowania bedące bijekcjami.

dowód: Pokażemy, że izometrie to przekształcenia jednoznaczne, różnowartościowe i "na". Niech $I : X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie dowolną izometrią, czyli przekształceniem zachowującym odległości.

Twierdzenie

Izometrie to odwzorowania będące bijekcjami.

dowód: Pokażemy, że izometrie to przekształcenia jednoznaczne, różnowartościowe i "na". Niech $I : X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie dowolną izometrią, czyli przekształceniem zachowującym odległości.
jednoznaczne: Niech $A \in X$ oraz istnieją elementy $B, B' \in Y$ takie, że $I(A) = B$ i $I(A) = B'$. Pokażemy, że $B = B'$.

Twierdzenie

Izometrie to odwzorowania będące bijekcjami.

dowód: Pokażemy, że izometrie to przekształcenia jednoznaczne, różnowartościowe i "na". Niech $I : X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie dowolną izometrią, czyli przekształceniem zachowującym odległości.
jednoznaczne: Niech $A \in X$ oraz istnieją elementy $B, B' \in Y$ takie, że $I(A) = B$ i $I(A) = B'$. Pokażemy, że $B = B'$. Mamy, że $|I(A)I(A)| = |BB'|$. Natomiast z faktu, że I jest izometrią mamy $|I(A)I(A)| = |AA| = 0$. Zatem $|BB'| = 0$, więc $B = B'$, co dowodzi jednoznaczności izometrii.

Twierdzenie

Izometrie to odwzorowania będące bijekcjami.

dowód: Pokażemy, że izometrie to przekształcenia jednoznaczne, różnowartościowe i "na". Niech $I : X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie dowolną izometrią, czyli przekształceniem zachowującym odległości.
jednoznaczne: Niech $A \in X$ oraz istnieją elementy $B, B' \in Y$ takie, że $I(A) = B$ i $I(A) = B'$. Pokażemy, że $B = B'$. Mamy, że $|I(A)I(A)| = |BB'|$. Natomiast z faktu, że I jest izometrią mamy $|I(A)I(A)| = |AA| = 0$. Zatem $|BB'| = 0$, więc $B = B'$, co dowodzi jednoznaczności izometrii.

różnowartościowe: Niech $A, B \in X$ będą dwoma dowolnymi punktami takimi, że $I(A) = I(B)$, wtedy $|I(A)I(B)| = 0$. Natomiast z definicji izometrii mamy $|I(A)I(B)| = |AB|$, więc $|AB| = 0$. Zatem $A = B$, co dowodzi różnowartościowości izometrii.

"na" (dowód ad absurdum-nie wprost): Załóżmy, że istnieje $B \in Y$, takie że dla każdego $A \in X$ zachodzi $I(A) \neq B$. Ponadto niech $C, D \in X$ będą punktami przez, które przechodzi prosta k. Wówczas istnieje prosta k' taka, że $I(k) = k'$ przechodząca przez punkty $I(C)$, $I(D)$.

Rozważmy dwa przypadki:

"na" (dowód ad absurdum-nie wprost): Załóżmy, że istnieje $B \in Y$, takie że dla każdego $A \in X$ zachodzi $I(A) \neq B$. Ponadto niech C, $D \in X$ będą punktami przez, które przechodzi prosta k. Wówczas istnieje prosta k' taka, że $I(k) = k'$ przechodząca przez punkty $I(C)$, $I(D)$.

Rozważmy dwa przypadki:

- $B \in k'$, wtedy istniej $E \in k$ taki, że $I(E) = B$, więc otrzymujemy sprzeczność "na" (dowód ad absurdum-nie wprost): Załóżmy, że istnieje $B \in Y$, takie że dla każdego $A \in X$ zachodzi $I(A) \neq B$. Ponadto niech C, $D \in X$ będą punktami przez, które przechodzi prosta k. Wówczas istnieje prosta k' taka, że $I(k) = k'$ przechodząca przez punkty $I(C)$, $I(D)$.

Rozważmy dwa przypadki:

- $B \in k'$, wtedy istniej $E \in k$ taki, że $I(E) = B$, więc otrzymujemy sprzeczność
- $B \notin k'$. Prowadzimy przez punkt B prostą m' prostopadłą do prostej k'. Wówczas $k' \cap m' = I(P)$, gdzie $P \in k$. Prosta m' jest obrazem prostej m prostopadłej do k oraz $k \cap m = \{P\}$, więc istnieje punkt $E \in m$, taki, że $I(E) = B$.

Definicja (punkty stałe izometrii)

Punkt $A \in \pi$ *nazywamy punktem stałym izometrii* I, *jeżeli*

$$I(A) = A.$$

Definicja (punkty stałe izometrii)

Punkt $A \in \pi$ nazywamy punktem stałym izometrii I, jeżeli

$$I(A) = A.$$

Odpowiedzmy teraz na pytanie: Jakim przekształceniem jest izometria posiadająca:

Definicja (punkty stałe izometrii)

Punkt $A \in \pi$ nazywamy punktem stałym izometrii I, jeżeli

$$I(A) = A.$$

Odpowiedzmy teraz na pytanie: Jakim przekształceniem jest izometria posiadająca:

a) trzy niewspółliniowe punkty stałe;

b) dwa różne punkty stałe;

c) punkt stały.

Definicja (punkty stałe izometrii)

Punkt $A \in \pi$ nazywamy punktem stałym izometrii I, jeżeli

$$I(A) = A.$$

Odpowiedzmy teraz na pytanie: Jakim przekształceniem jest izometria posiadająca:

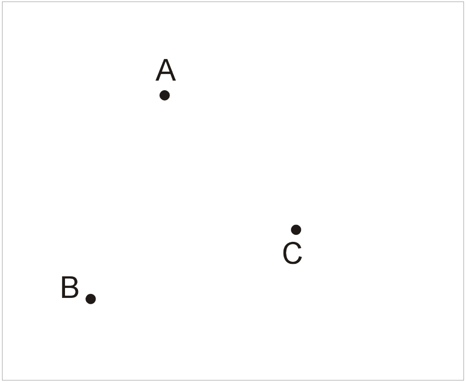
a) trzy niewspółliniowe punkty stałe;

b) dwa różne punkty stałe;

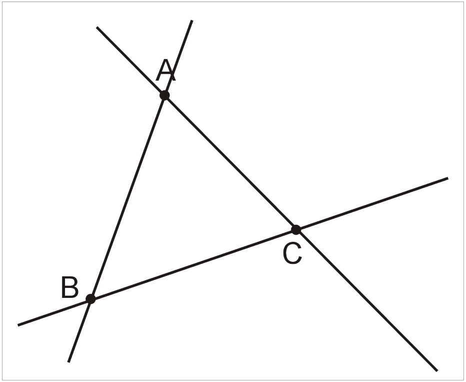
c) punkt stały.

Odpowiedź do a): Niech $A, B, C \in \pi$ będą trzema niewspółliniowymi punktami stałymi izometrii I tzn. $I(A) = A$, $I(B) = B$, $I(C) = C$. Wybierzmy dowolny punkt P leżący na prostej AB, a ponieważ obrazem prostej w izometrii jest prosta oraz A i B to punkty stałe więc punkt $I(P) = P$. Zatem każdy punkt prostej AB jest punktem stałym.

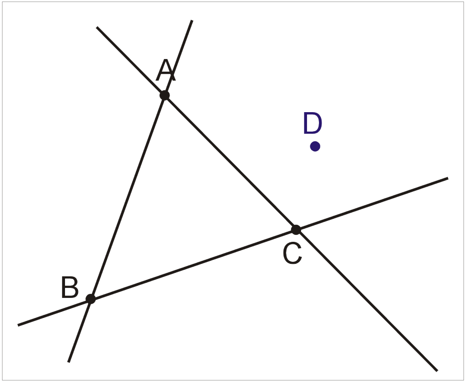
Rozważmy teraz trzy punkty stałe A, B, C



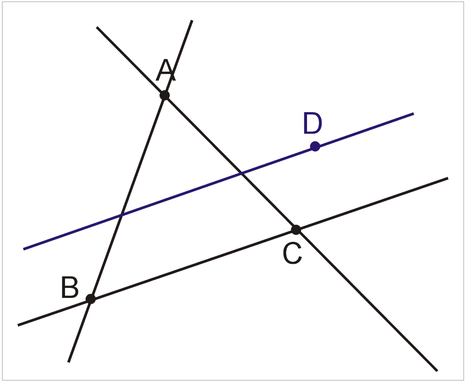
Rozważmy teraz trzy punkty stałe A, B, C i poprowadźmy przez nie proste AB, AC, BC.



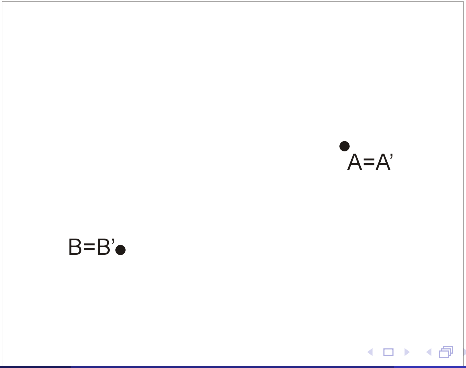
Rozważmy teraz trzy punkty stałe A, B, C i poprowadźmy przez nie proste AB, AC, BC. Każdy punkt tych prostych jest punktem stałym izometrii I, co więcej przez każdy punkt płaszczyzny można przeprowadzić prostą w taki sposób, aby przecinała co najmniej dwie proste spośród AB, AC, BC.



Rozważmy teraz trzy punkty stałe A, B, C i poprowadźmy przez nie proste AB, AC, BC. Każdy punkt tych prostych jest punktem stałym izometrii I, co więcej przez każdy punkt płaszczyzny można przeprowadzić prostą w taki sposób, aby przecinała co najmniej dwie proste spośród AB, AC, BC. Stąd wnioskujemy, że w tym przypadku każdy punkt płaszczyzny π będzie punktem stałym izometrii I. Zatem izometria jest przekształceniem tożsamościowym(tożsamością): oznaczenie 1_π.

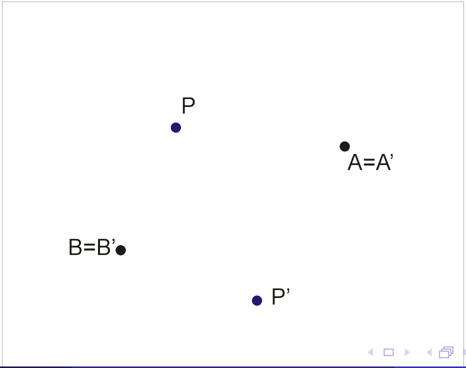


Odpowiedź do b): Niech $A, B \in \pi$ będą dwoma różnymi punktami stałymi izometrii I tzn. $I(A) = A$, $I(B) = B$. Oczywiście izometria I może być tożsamością. Odpowiedzmy na pytanie jakim innym przekształceniem może jeszcze być.



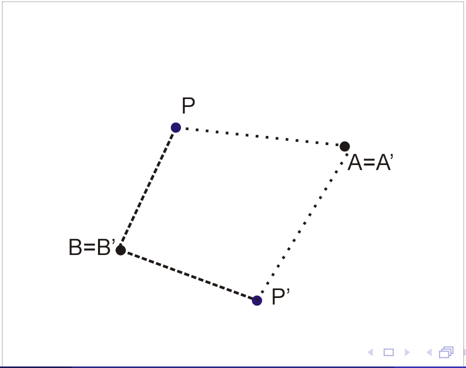
Odpowiedź do b): Niech $A, B \in \pi$ będą dwoma różnymi punktami stałymi izometrii I tzn. $I(A) = A$, $I(B) = B$. Oczywiście izometria I może być tożsamością. Odpowiedzmy na pytanie jakim innym przekształceniem może jeszcze być.

Załóżmy, że I nie jest tożsamością, wówczas istnieje punkt P taki, że $I(P) = P'$ oraz $P' \neq P$.



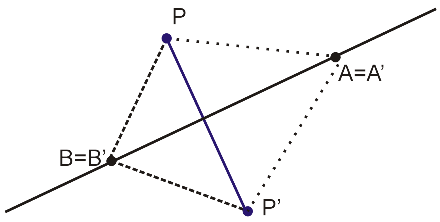
Odpowiedź do b): Niech $A, B \in \pi$ będą dwoma różnymi punktami stałymi izometrii I tzn. $I(A) = A$, $I(B) = B$. Oczywiście izometria I może być tożsamością. Odpowiedzmy na pytanie jakim innym przekształceniem może jeszcze być.

Załóżmy, że I nie jest tożsamością, wówczas istnieje punkt P taki, że $I(P) = P'$ oraz $P' \neq P$. Izometria zachowuje odległości między punktami, więc:
$|AP| = |I(A)I(P)| = |A'P'|$ oraz $|BP| = |I(B)I(P)| = |B'P'|$,



Odpowiedź do b): Niech $A, B \in \pi$ będą dwoma różnymi punktami stałymi izometrii I tzn. $I(A) = A$, $I(B) = B$. Oczywiście izometria I może być tożsamością. Odpowiedzmy na pytanie jakim innym przekształceniem może jeszcze być.

Załóżmy, że I nie jest tożsamością, wówczas istnieje punkt P taki, że $I(P) = P'$ oraz $P' \neq P$. Izometria zachowuje odległości między punktami, więc:
$|AP| = |I(A)I(P)| = |A'P'|$ oraz $|BP| = |I(B)I(P)| = |B'P'|$, co oznacza, że prosta AB (nazwijmy ją prostą p) jest symetralną odcinka PP'.



Niech S_p oznacza symetrię osiową o osi p. Złożenie $S_p \circ I$ jest izometrią oraz zachodzą:

Niech S_p oznacza symetrię osiową o osi p. Złożenie $S_p \circ I$ jest izometrią oraz zachodzą:

$$(S_p \circ I)(A) = S_p(I(A)) = S_p(A) = A$$

Niech S_p oznacza symetrię osiową o osi p. Złożenie $S_p \circ I$ jest izometrią oraz zachodzą:

$$(S_p \circ I)(A) = S_p(I(A)) = S_p(A) = A$$
$$(S_p \circ I)(B) = S_p(I(B)) = S_p(B) = B$$

Niech S_p oznacza symetrię osiową o osi p. Złożenie $S_p \circ I$ jest izometrią oraz zachodzą:

$$(S_p \circ I)(A) = S_p(I(A)) = S_p(A) = A$$
$$(S_p \circ I)(B) = S_p(I(B)) = S_p(B) = B$$
$$(S_p \circ I)(P) = S_p(I(P)) = S_p(P') = P.$$

Co oznacza, że $S_p \circ I$ ma trzy niewspółliniowe punkty stałe, więc na mocy a) jest tożsamością: $S_p \circ I = 1_\pi$. Zatem:

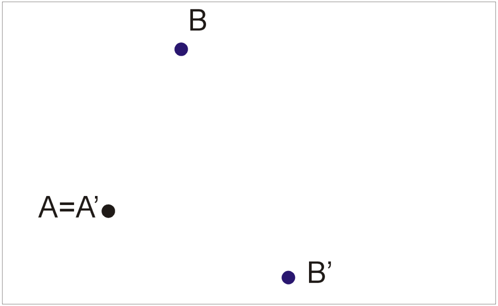
Niech S_p oznacza symetrię osiową o osi p. Złożenie $S_p \circ I$ jest izometrią oraz zachodzą:

$$(S_p \circ I)(A) = S_p(I(A)) = S_p(A) = A$$
$$(S_p \circ I)(B) = S_p(I(B)) = S_p(B) = B$$
$$(S_p \circ I)(P) = S_p(I(P)) = S_p(P') = P.$$

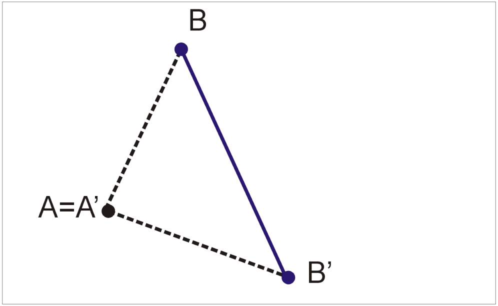
Co oznacza, że $S_p \circ I$ ma trzy niewspółliniowe punkty stałe, więc na mocy a) jest tożsamością: $S_p \circ I = 1_\pi$. Zatem:

$$S_p = S_p \circ 1_\pi = S_p \circ (S_p \circ I) = (S_p \circ S_p) \circ I = 1_\pi \circ I = I.$$

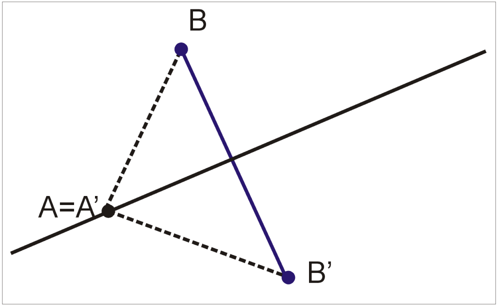
Odpowiedź do c): Niech $I \neq 1_\pi$, A będzie punktem stałym, wówczas istnieje punkt B taki, że $I(B) = B'$ oraz $B' \neq B$.



Odpowiedź do c): Niech $I \neq 1_\pi$, A będzie punktem stałym, wówczas istnieje punkt B taki, że $I(B) = B'$ oraz $B' \neq B$.

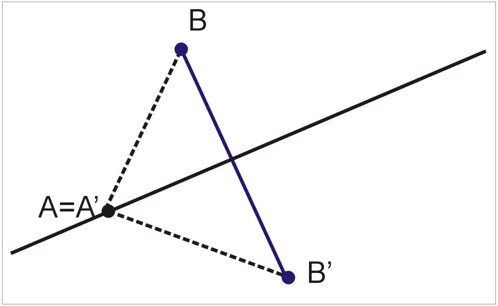


Odpowiedź do c): Niech $I \neq 1_{\pi}$, A będzie punktem stałym, wówczas istnieje punkt B taki, że $I(B) = B'$ oraz $B' \neq B$. Niech prosta b będzie symetralną BB', wtedy punkt A leży na symetralnej b. Niech S_b oznacza izometrię osiową o osi b. Złożenie $S_b \circ I$, jest izometrią oraz zachodzą:



Odpowiedź do c): Niech $I \neq 1_\pi$, A będzie punktem stałym, wówczas istnieje punkt B taki, że $I(B) = B'$ oraz $B' \neq B$. Niech prosta b będzie symetralną BB', wtedy punkt A leży na symetralnej b. Niech S_b oznacza izometrię osiową o osi b. Złożenie $S_b \circ I$, jest izometrią oraz zachodzą:

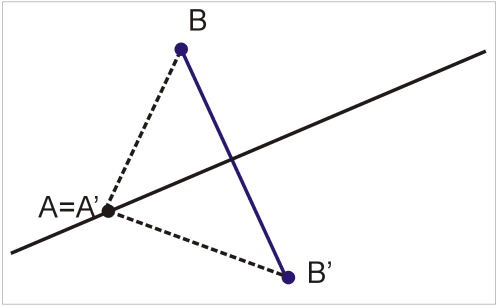
$$(S_b \circ I)(A) = S_b(I(A)) = S_b(A) = A$$
$$(S_b \circ I)(B) = S_b(I(B)) = S_b(B') = B.$$



Odpowiedź do c): Niech $I \neq 1_\pi$, A będzie punktem stałym, wówczas istnieje punkt B taki, że $I(B) = B'$ oraz $B' \neq B$. Niech prosta b będzie symetralną BB', wtedy punkt A leży na symetralnej b. Niech S_b oznacza izometrię osiową o osi b. Złożenie $S_b \circ I$, jest izometrią oraz zachodzą:

$$(S_b \circ I)(A) = S_b(I(A)) = S_b(A) = A$$
$$(S_b \circ I)(B) = S_b(I(B)) = S_b(B') = B.$$

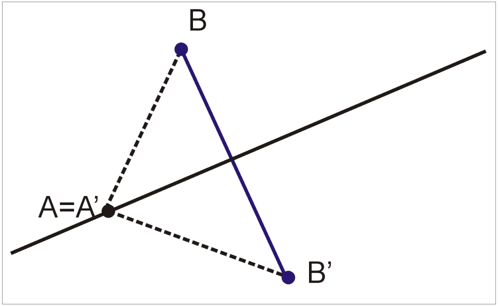
Co oznacza, że punkty A, B są punktami stałymi izometrii $S_b \circ I$. Zatem na mocy b)$S_b \circ I = 1_\pi$ lub $S_b \circ I = S_p$,



Odpowiedź do c): Niech $I \neq 1_\pi$, A będzie punktem stałym, wówczas istnieje punkt B taki, że $I(B) = B'$ oraz $B' \neq B$. Niech prosta b będzie symetralną BB', wtedy punkt A leży na symetralnej b. Niech S_b oznacza izometrię osiową o osi b. Złożenie $S_b \circ I$, jest izometrią oraz zachodzą:

$$(S_b \circ I)(A) = S_b(I(A)) = S_b(A) = A$$
$$(S_b \circ I)(B) = S_b(I(B)) = S_b(B') = B.$$

Co oznacza, że punkty A, B są punktami stałymi izometrii $S_b \circ I$. Zatem na mocy b)$S_b \circ I = 1_\pi$ lub $S_b \circ I = S_p$, więc $I = S_b$ lub $I = S_b \circ S_p$.



Twierdzenie (strukturalne o izometriach)

Każda izometria jest tożsamością lub symetrią osiową, lub złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych

dowód:

Twierdzenie (strukturalne o izometriach)

Każda izometria jest tożsamością lub symetrią osiową, lub złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych

dowód: Niech $I \neq 1_\pi$, wówczas istnieje punkt A taki, że $I(A) = A'$ oraz $A' \neq A$. Niech prosta a będzie symetralną AA' oraz S_a oznacza izometrię osiową o osi a. Wówczas

$$(S_a \circ I)(A) = S_a(I(A)) = S_a(A') = A,$$

Twierdzenie (strukturalne o izometriach)

Każda izometria jest tożsamością lub symetrią osiową, lub złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych

dowód: Niech $I \neq 1_\pi$, wówczas istnieje punkt A taki, że $I(A) = A'$ oraz $A' \neq A$. Niech prosta a będzie symetralną AA' oraz S_a oznacza izometrię osiową o osi a. Wówczas

$$(S_a \circ I)(A) = S_a(I(A)) = S_a(A') = A,$$

więc z podpunktu c) ($S_a \circ I$ jest izometrią o jednym punkcie stałym) mamy, że:

$$S_a \circ I = 1_\pi \quad \text{lub } S_a \circ I = S_b \quad \text{lub } S_a \circ I = S_b \circ S_p.$$

Twierdzenie (strukturalne o izometriach)

Każda izometria jest tożsamością lub symetrią osiową, lub złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych

<u>dowód:</u> Niech $I \neq 1_\pi$, wówczas istnieje punkt A taki, że $I(A) = A'$ oraz $A' \neq A$. Niech prosta a będzie symetralną AA' oraz S_a oznacza izometrię osiową o osi a. Wówczas

$$(S_a \circ I)(A) = S_a(I(A)) = S_a(A') = A,$$

więc z podpunktu c) $(S_a \circ I$ jest izometrią o jednym punkcie stałym) mamy, że:

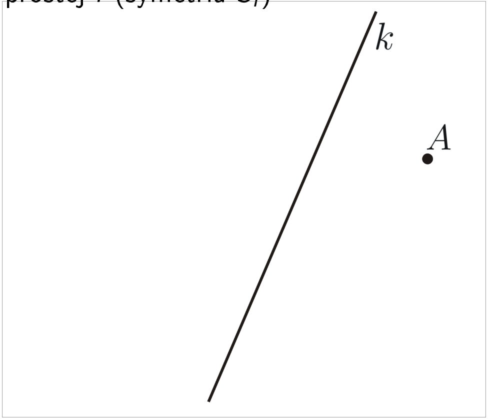
$$S_a \circ I = 1_\pi \quad \text{lub } S_a \circ I = S_b \quad \text{lub } S_a \circ I = S_b \circ S_p.$$

Stąd dostajemy, że:

$$I = S_a \qquad I = S_a \circ S_b \qquad \text{lub } I = S_a \circ S_b \circ S_p.$$

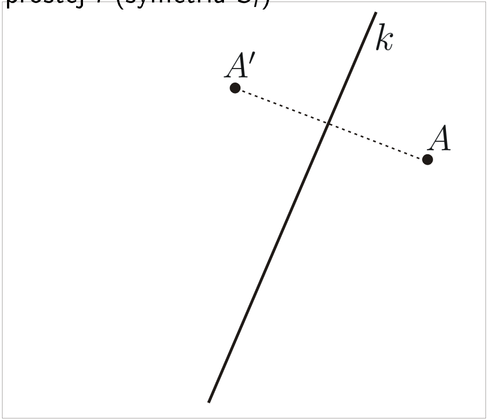
Złożenie symetrii osiowych

Rozważmy na płaszczyźnie punkt A i dokonajmy dwukrotnej symtrii osiowej tego punktu. Najpierw względem prostej k, (symetria S_k) a potem jego obrazu względem prostej l (symetria S_l)



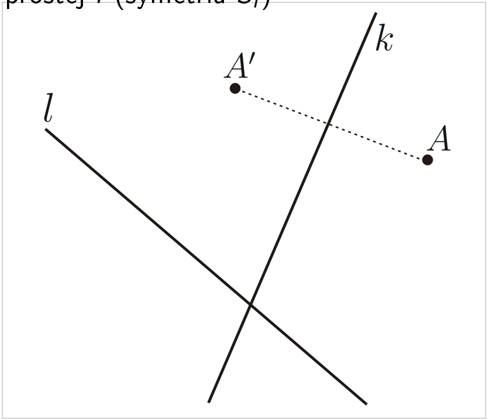
Złożenie symetrii osiowych

Rozważmy na płaszczyźnie punkt A i dokonajmy dwukrotnej symtrii osiowej tego punktu. Najpierw względem prostej k, (symetria S_k) a potem jego obrazu względem prostej l (symetria S_l)



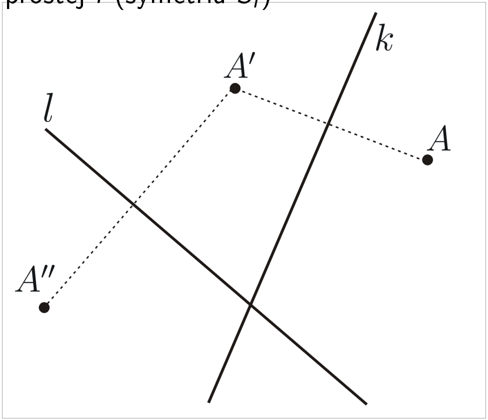
Złożenie symetrii osiowych

Rozważmy na płaszczyźnie punkt A i dokonajmy dwukrotnej symtrii osiowej tego punktu. Najpierw względem prostej k, (symetria S_k) a potem jego obrazu względem prostej l (symetria S_l)



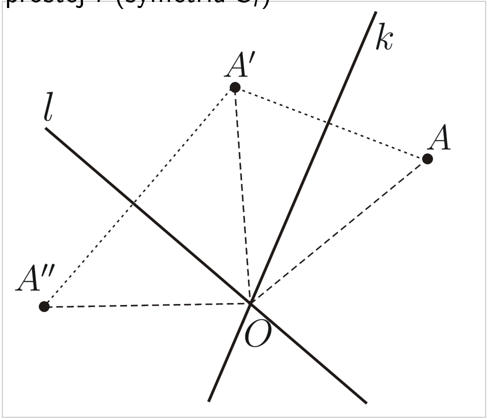
Złożenie symetrii osiowych

Rozważmy na płaszczyźnie punkt A i dokonajmy dwukrotnej symtrii osiowej tego punktu. Najpierw względem prostej k, (symetria S_k) a potem jego obrazu względem prostej l (symetria S_l)



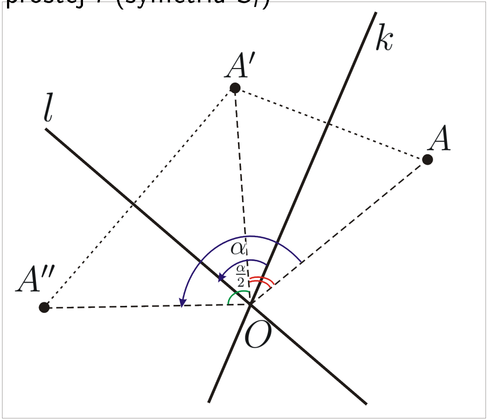
Złożenie symetrii osiowych

Rozważmy na płaszczyźnie punkt A i dokonajmy dwukrotnej symtrii osiowej tego punktu. Najpierw względem prostej k, (symetria S_k) a potem jego obrazu względem prostej l (symetria S_l)



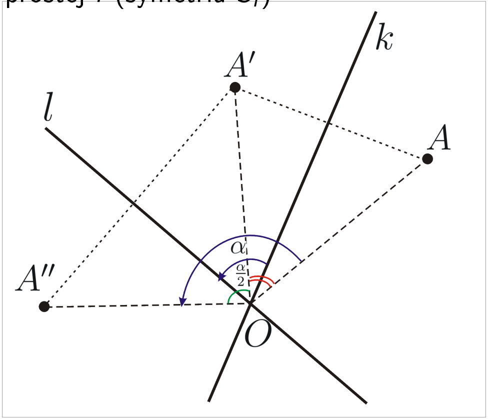
Złożenie symetrii osiowych

Rozważmy na płaszczyźnie punkt A i dokonajmy dwukrotnej symtrii osiowej tego punktu. Najpierw względem prostej k, (symetria S_k) a potem jego obrazu względem prostej l (symetria S_l)



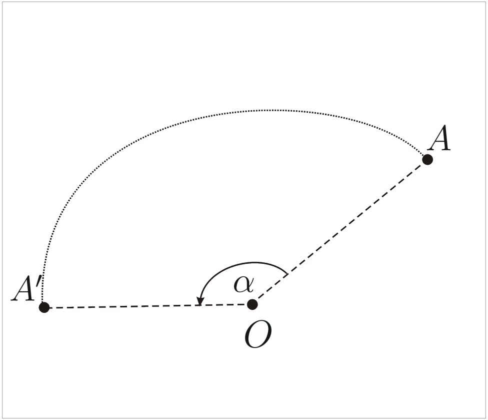
Złożenie symetrii osiowych

Rozważmy na płaszczyźnie punkt A i dokonajmy dwukrotnej symtrii osiowej tego punktu. Najpierw względem prostej k, (symetria S_k) a potem jego obrazu względem prostej l (symetria S_l)

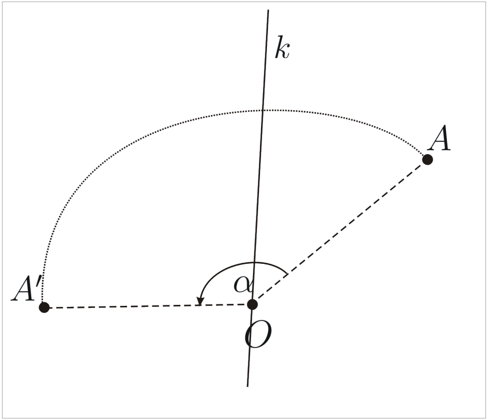


Wniosek: Złożenie symetrii $S_l \circ S_k$ jest obrotem O_O^{α} wokół punktu O (przecięcie prostych k z l) o kąt α, gdzie kąt pomiędzy prostymi k i l wynosi $\alpha/2$.

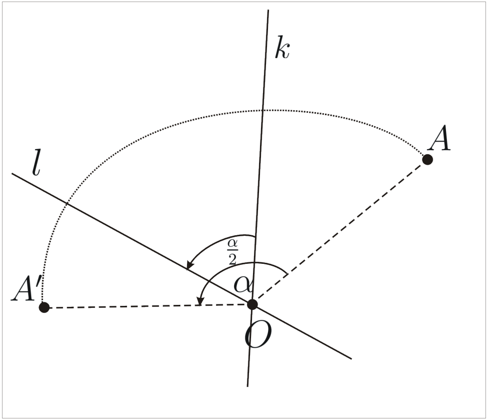
Teraz rozważmy sytuację odwrotną tzn. weźmy obrót O_O^α i wyrazimy go przez symetrie osiowe. Wybieramy dowolną prostą k przechodzącą przez punkt O, a następnie prostą l również przechodzącą przez punkt O oraz tworzącą z prostą k kąt $\alpha/2$:



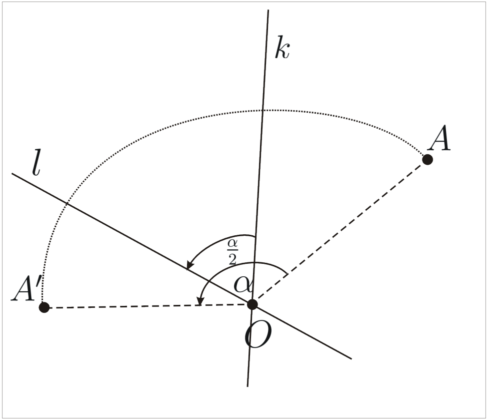
Teraz rozważmy sytuację odwrotną tzn. weźmy obrót O_O^α i wyrazimy go przez symetrie osiowe. Wybieramy dowolną prostą k przechodzącą przez punkt O, a następnie prostą l również przechodzącą przez punkt O oraz tworzącą z prostą k kąt $\alpha/2$:



Teraz rozważmy sytuację odwrotną tzn. weźmy obrót O_O^α i wyrazimy go przez symetrie osiowe. Wybieramy dowolną prostą k przechodzącą przez punkt O, a następnie prostą l również przechodzącą przez punkt O oraz tworzącą z prostą k kąt $\alpha/2$:

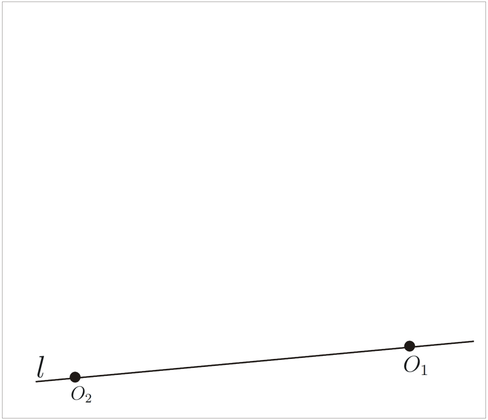


Teraz rozważmy sytuację odwrotną tzn. weźmy obrót O_O^α i wyrazimy go przez symetrie osiowe. Wybieramy dowolną prostą k przechodzącą przez punkt O, a następnie prostą l również przechodzącą przez punkt O oraz tworzącą z prostą k kąt $\alpha/2$:

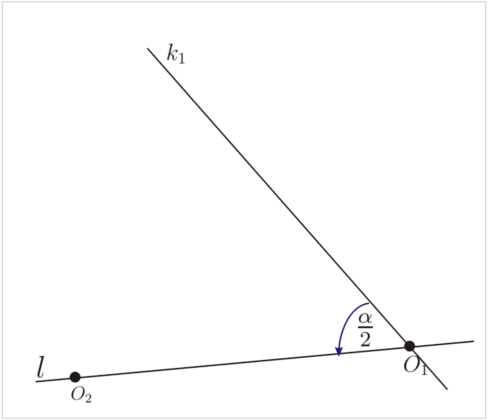


Wniosek: Obrót o kąt α możemy wyrazić jako złożenie symetrii $S_l \circ S_k$ o osiach przechodzących przez środek obrotu i przecinających się pod kątem $\alpha/2$.

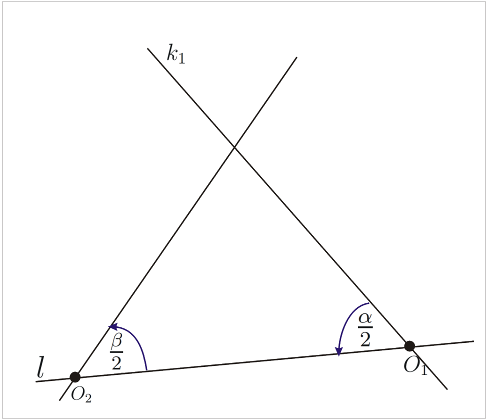
Złożenie dwóch obrotów Teraz rozważmy dwa obroty $O^{\alpha}_{O_1}$ oraz $O^{\beta}_{O_2}$. Co otrzymamy składając $O^{\beta}_{O_2} \circ O^{\alpha}_{O_1}$? Gdy $O_1 = O_2$ odpowiedź oczywista. Niech $O_1 \neq O_2$:



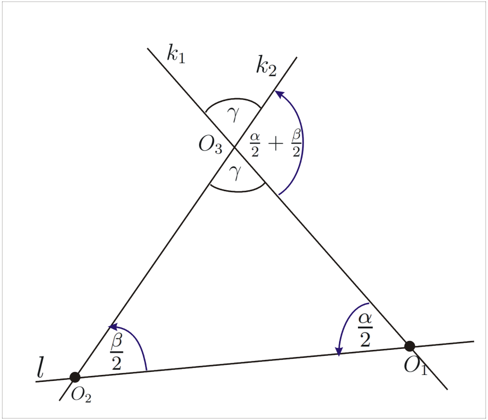
Złożenie dwóch obrotów Teraz rozważmy dwa obroty $O^{\alpha}_{O_1}$ oraz $O^{\beta}_{O_2}$. Co otrzymamy składając $O^{\beta}_{O_2} \circ O^{\alpha}_{O_1}$? Gdy $O_1 = O_2$ odpowiedź oczywista. Niech $O_1 \neq O_2$:



Złożenie dwóch obrotów Teraz rozważmy dwa obroty $O_{O_1}^{\alpha}$ oraz $O_{O_2}^{\beta}$. Co otrzymamy składając $O_{O_2}^{\beta} \circ O_{O_1}^{\alpha}$? Gdy $O_1 = O_2$ odpowiedź oczywista. Niech $O_1 \neq O_2$:



Złożenie dwóch obrotów Teraz rozważmy dwa obroty $O^{\alpha}_{O_1}$ oraz $O^{\beta}_{O_2}$. Co otrzymamy składając $O^{\beta}_{O_2} \circ O^{\alpha}_{O_1}$? Gdy $O_1 = O_2$ odpowiedź oczywista. Niech $O_1 \neq O_2$:



Możemy to też zapisać algebraicznie. Niech $O_{O_1}^{\alpha} = S_l \circ S_{k_1}$ oraz $O_{O_2}^{\beta} = S_{k_2} \circ S_l$.
Wówczas:

Możemy to też zapisać algebraicznie. Niech $O^{\alpha}_{O_1} = S_l \circ S_{k_1}$ oraz $O^{\beta}_{O_2} = S_{k_2} \circ S_l$.
Wówczas:
$O^{\beta}_{O_2} \circ O^{\alpha}_{O_1} = (S_{k_2} \circ S_l) \circ (S_l \circ S_{k_1}) = S_{k_2} \circ (S_l \circ S_l) \circ S_{k_1} = S_{k_2} \circ S_{k_1} = O^{\alpha+\beta}_{O_3}$

Możemy to też zapisać algebraicznie. Niech $O_{O_1}^{\alpha} = S_l \circ S_{k_1}$ oraz $O_{O_2}^{\beta} = S_{k_2} \circ S_l$.
Wówczas:
$O_{O_2}^{\beta} \circ O_{O_1}^{\alpha} = (S_{k_2} \circ S_l) \circ (S_l \circ S_{k_1}) = S_{k_2} \circ (S_l \circ S_l) \circ S_{k_1} = S_{k_2} \circ S_{k_1} = O_{O_3}^{\alpha+\beta}$

Wniosek: Złożenie obrotu o kąt α względem punktu O_1 z obrotem o kąt β względem punktu O_2 w przypadku gdy:

Możemy to też zapisać algebraicznie. Niech $O_{O_1}^{\alpha} = S_l \circ S_{k_1}$ oraz $O_{O_2}^{\beta} = S_{k_2} \circ S_l$.
Wówczas:
$O_{O_2}^{\beta} \circ O_{O_1}^{\alpha} = (S_{k_2} \circ S_l) \circ (S_l \circ S_{k_1}) = S_{k_2} \circ (S_l \circ S_l) \circ S_{k_1} = S_{k_2} \circ S_{k_1} = O_{O_3}^{\alpha+\beta}$

Wniosek: Złożenie obrotu o kąt α względem punktu O_1 z obrotem o kąt β względem punktu O_2 w przypadku gdy:

a) $\alpha + \beta$ nie są wielokrotnością 360^o, to złożenie jest obrotem względem punktu O_3 o kąt $\alpha + \beta$, gdzie punkt O_3 jest wierzchołkiem $\triangle O_1 O_2 O_3$, w którym $\angle O_3 O_1 O_2 = \frac{\alpha}{2}$ oraz $\angle O_1 O_2 O_3 = \frac{\beta}{2}$;

Możemy to też zapisać algebraicznie. Niech $O_{O_1}^{\alpha} = S_l \circ S_{k_1}$ oraz $O_{O_2}^{\beta} = S_{k_2} \circ S_l$.
Wówczas:

$$O_{O_2}^{\beta} \circ O_{O_1}^{\alpha} = (S_{k_2} \circ S_l) \circ (S_l \circ S_{k_1}) = S_{k_2} \circ (S_l \circ S_l) \circ S_{k_1} = S_{k_2} \circ S_{k_1} = O_{O_3}^{\alpha+\beta}$$

Wniosek: Złożenie obrotu o kąt α względem punktu O_1 z obrotem o kąt β względem punktu O_2 w przypadku gdy:

a) $\alpha + \beta$ nie są wielokrotnością 360^o, to złożenie jest obrotem względem punktu O_3 o kąt $\alpha + \beta$, gdzie punkt O_3 jest wierzchołkiem $\triangle O_1 O_2 O_3$, w którym $\angle O_3 O_1 O_2 = \frac{\alpha}{2}$ oraz $\angle O_1 O_2 O_3 = \frac{\beta}{2}$;

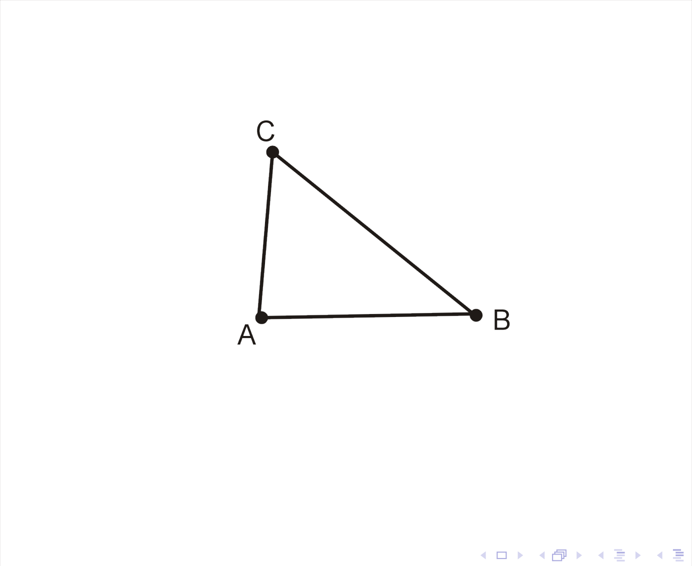
b) $\alpha + \beta$ jest wielokrotnością 360^o, to złożenie jest przesunięciem (proste k_1 i k_2 są równoległe);

Możemy to też zapisać algebraicznie. Niech $O_{O_1}^{\alpha} = S_l \circ S_{k_1}$ oraz $O_{O_2}^{\beta} = S_{k_2} \circ S_l$.
Wówczas:
$O_{O_2}^{\beta} \circ O_{O_1}^{\alpha} = (S_{k_2} \circ S_l) \circ (S_l \circ S_{k_1}) = S_{k_2} \circ (S_l \circ S_l) \circ S_{k_1} = S_{k_2} \circ S_{k_1} = O_{O_3}^{\alpha+\beta}$

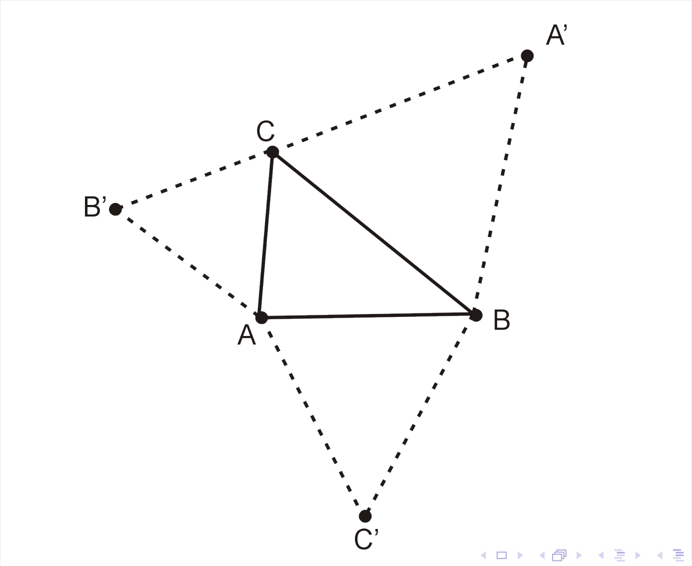
Wniosek: Złożenie obrotu o kąt α względem punktu O_1 z obrotem o kąt β względem punktu O_2 w przypadku gdy:

a) $\alpha + \beta$ nie są wielokrotnością 360^o, to złożenie jest obrotem względem punktu O_3 o kąt $\alpha + \beta$, gdzie punkt O_3 jest wierzchołkiem $\triangle O_1 O_2 O_3$, w którym $\angle O_3 O_1 O_2 = \frac{\alpha}{2}$ oraz $\angle O_1 O_2 O_3 = \frac{\beta}{2}$;
b) $\alpha + \beta$ jest wielokrotnością 360^o, to złożenie jest przesunięciem (proste k_1 i k_2 są równoległe);
c) $\alpha + \beta = 180^o$, to złożenie jest symetrią środkową względem punktu O_3 (proste k_1 i k_2 są prostopadłe-mamy względem ich punktu przecięcia).

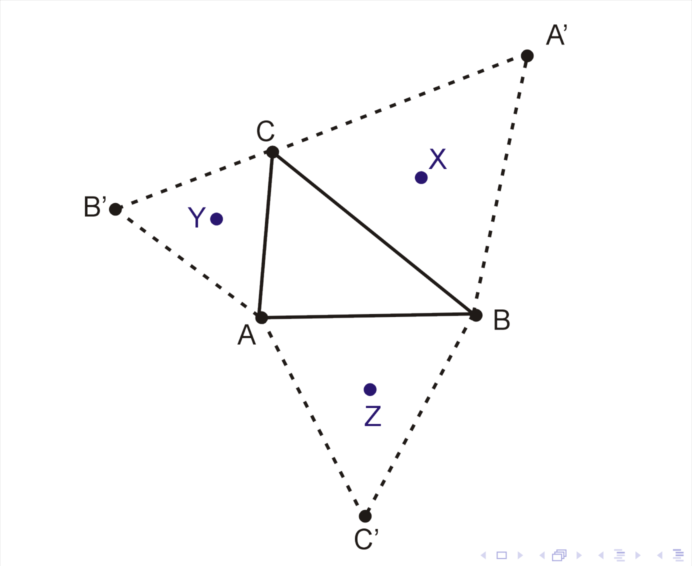
Zadanie 1.(Twierdzenie Napoleona) Udowodnij, że ortocentra trójkątów równobocznych (środki ciężkości) zbudowanych na bokach dowolnego trójkąta są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



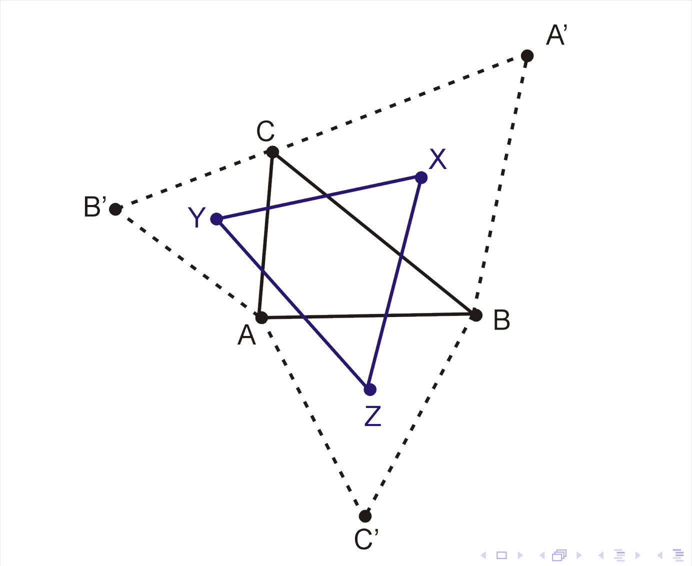
Zadanie 1.(Twierdzenie Napoleona) Udowodnij, że ortocentra trójkątów równobocznych (środki ciężkości) zbudowanych na bokach dowolnego trójkąta są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



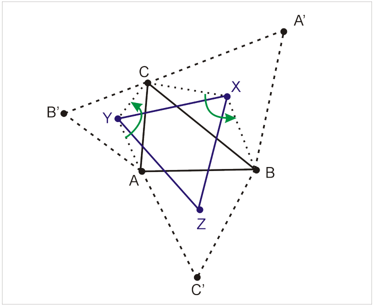
Zadanie 1.(Twierdzenie Napoleona) Udowodnij, że ortocentra trójkątów równobocznych (środki ciężkości) zbudowanych na bokach dowolnego trójkąta są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



Zadanie 1.(Twierdzenie Napoleona) Udowodnij, że ortocentra trójkątów równobocznych (środki ciężkości) zbudowanych na bokach dowolnego trójkąta są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

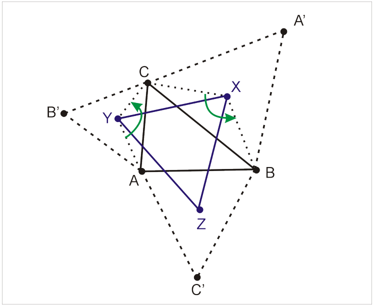


Rozwiązanie:



Zauważmy, że $\angle AYC = \angle CXB = 120^o$. Rozważmy obroty $O_x^{120^o}$ oraz $O_y^{120^o}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

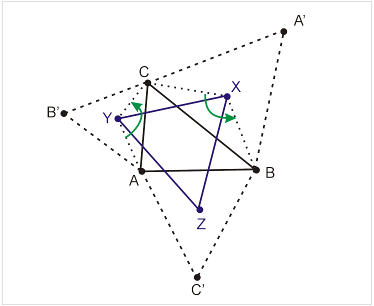
Rozwiązanie:



Zauważmy, że $\angle AYC = \angle CXB = 120^o$. Rozważmy obroty $O_x^{120^o}$ oraz $O_y^{120^o}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Ponieważ $O_y^{120^o}(A) = C$ i $O_x^{120^o}(C) = B$, więc złożenie

$$O_x^{120^o} \circ \left(O_y^{120^o}\right)(A) = O_x^{120^o}(O_x^{120^o}(A)) = O_x^{120^o}(C) = B.$$

Rozwiązanie:

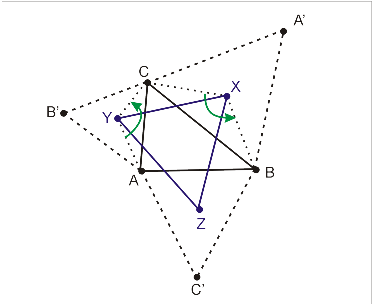


Zauważmy, że $\angle AYC = \angle CXB = 120^o$. Rozważmy obroty $O_x^{120^o}$ oraz $O_y^{120^o}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Ponieważ $O_y^{120^o}(A) = C$ i $O_x^{120^o}(C) = B$, więc złożenie

$$O_x^{120^o} \circ \left(O_y^{120^o}\right)(A) = O_x^{120^o}(O_x^{120^o}(A)) = O_x^{120^o}(C) = B.$$

Wiemy, że złożenie $O_x^{120^o} \circ O_y^{120^o}$ jest obrotem o 240^o o pewien punkt D, gdzie $\angle XYD = \angle YXD = 60^o$.

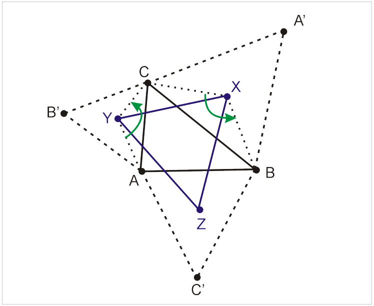
Rozwiązanie:



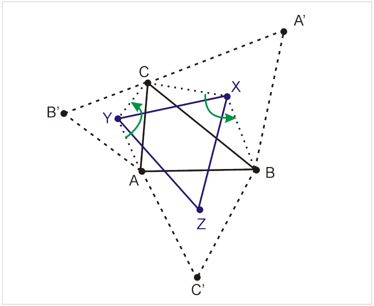
Zauważmy, że $\angle AYC = \angle CXB = 120^o$. Rozważmy obroty $O_x^{120^o}$ oraz $O_y^{120^o}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Ponieważ $O_y^{120^o}(A) = C$ i $O_x^{120^o}(C) = B$, więc złożenie

$$O_x^{120^o} \circ \left(O_y^{120^o}\right)(A) = O_x^{120^o}(O_x^{120^o}(A)) = O_x^{120^o}(C) = B.$$

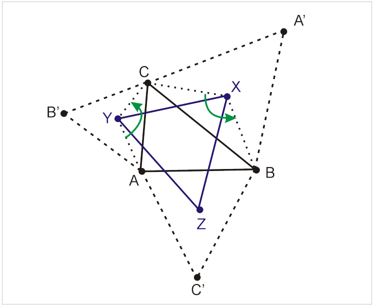
Wiemy, że złożenie $O_x^{120^o} \circ O_y^{120^o}$ jest obrotem o 240^o o pewien punkt D, gdzie $\angle XYD = \angle YXD = 60^o$. Stąd $\angle XDY = 60^o$, co oznacza że $\triangle XYD$ jest równoboczny.



Ponadto, z faktu, że $\triangle AC'B$ jest równoboczny oraz punkt Z to jego środek ciężkości mamy: $O_Z^{240^o}(A) = B$.



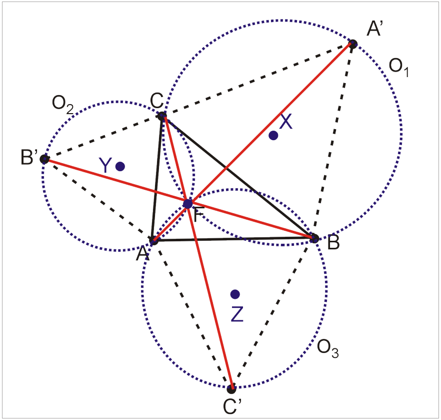
Ponadto, z faktu, że $\triangle AC'B$ jest równoboczny oraz punkt Z to jego środek ciężkości mamy: $O_Z^{240^o}(A) = B$. Ostatecznie, ponieważ $O_Z^{240^o}(A) = B = O_D^{240^o}(A)$ oraz obroty mają ta samą orientację(przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) wynika, że $D = Z$. Co dowodzi, że $\triangle XYZ$ jest równoboczny.



Ponadto, z faktu, że $\triangle AC'B$ jest równoboczny oraz punkt Z to jego środek ciężkości mamy: $O_Z^{240^o}(A) = B$. Ostatecznie, ponieważ $O_Z^{240^o}(A) = B = O_D^{240^o}(A)$ oraz obroty mają ta samą orientację(przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) wynika, że $D = Z$. Co dowodzi, że $\triangle XYZ$ jest równoboczny.

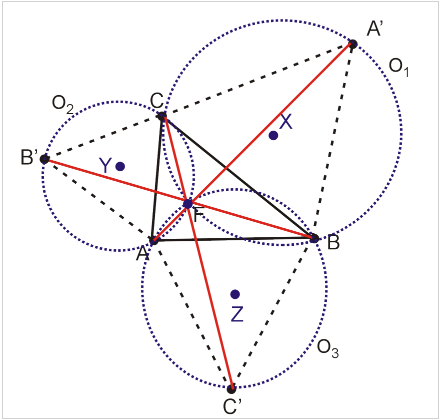
Uwaga: Punkt D mógłby być jeszcze równy punktowi Z', (obrazowi punktu Z względem osi AB), ale wówczas mielibyśmy obrót (w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara) o 120^o przeprowadzający A na B

Zadanie 1*. Niech założenia będą takie jak w zadaniu 1. Wówczas również zachodzi:



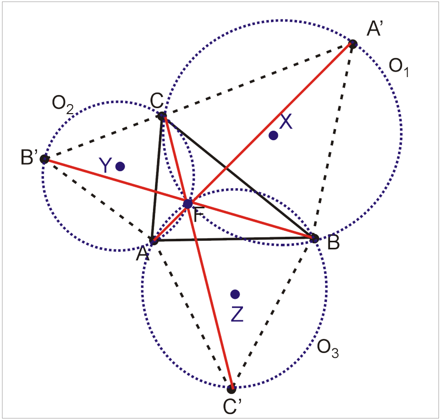
Zadanie 1*. Niech założenia będą takie jak w zadaniu 1. Wówczas również zachodzi:

a) $|AA'| = |BB'| = |CC'|$;



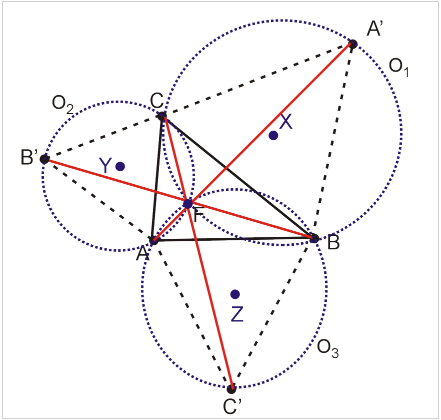
Zadanie 1*. Niech założenia będą takie jak w zadaniu 1. Wówczas również zachodzi:

a) $|AA'| = |BB'| = |CC'|$;
b) każde dwa odcinki z AA', BB', CC' przecinają się pod kątem 60^o;



Zadanie 1*. Niech założenia będą takie jak w zadaniu 1. Wówczas również zachodzi:

a) $|AA'| = |BB'| = |CC'|$;
b) każde dwa odcinki z AA', BB', CC' przecinają się pod kątem 60^o;
c) odcinki AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie (F);



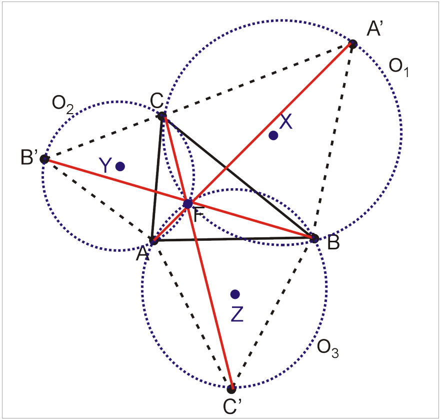
Zadanie 1*. Niech założenia będą takie jak w zadaniu 1. Wówczas również zachodzi:

a) $|AA'| = |BB'| = |CC'|$;

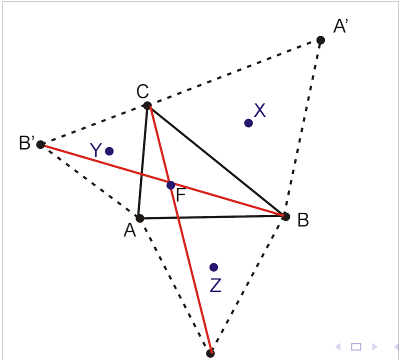
b) każde dwa odcinki z AA', BB', CC' przecinają się pod kątem 60^o;

c) odcinki AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie (F);

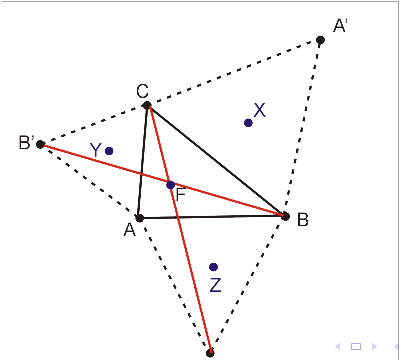
d) okręgi o_1, o_2, o_3 przecinają się w punkcie F.



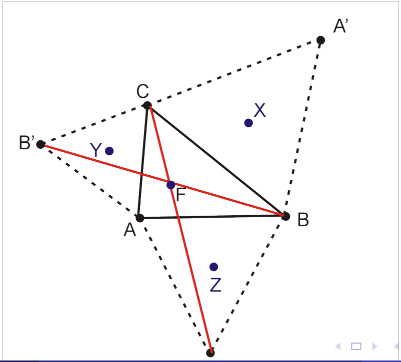
Rozwiązanie: a) Najpierw wykażmy, że $|BB'| = |CC'|$. W tym celu zauważmy, że $O_A^{60^o}(C) = B'$ oraz $O_A^{60^o}(C') = B$.



Rozwiązanie: a) Najpierw wykażmy, że $|BB'| = |CC'|$. W tym celu zauważmy, że $O_A^{60^o}(C) = B'$ oraz $O_A^{60^o}(C') = B$. Stąd mamy, że w wyniku obrotu $O_A^{60^o}$ odcinek CC' przejdzie nam na BB'. Obrót to izometria, więc $|BB' = |CC'||$

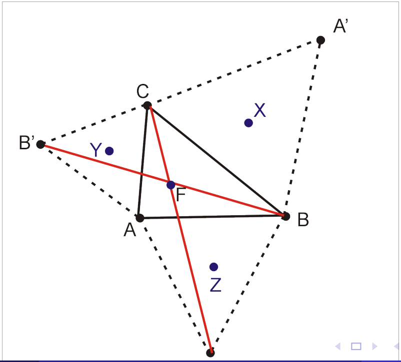


Rozwiązanie: a) Najpierw wykażmy, że $|BB'| = |CC'|$. W tym celu zauważmy, że $O_A^{60^o}(C) = B'$ oraz $O_A^{60^o}(C') = B$. Stąd mamy, że w wyniku obrotu $O_A^{60^o}$ odcinek CC' przejdzie nam na BB'. Obrót to izometria, więc $|BB' = |CC'||$ W ten sam sposób wykazujemy, że $|AA'| = |BB'|$. Zatem $|AA'| = |BB'| = |CC'|$.

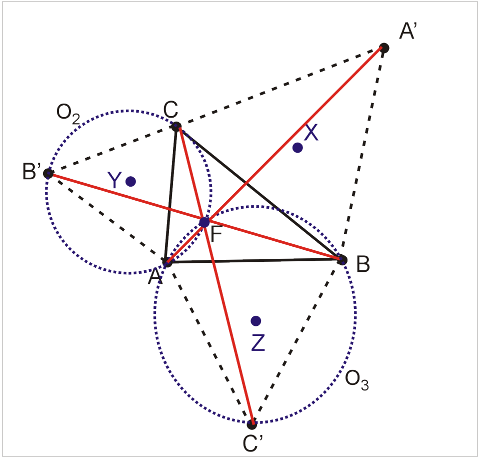


Rozwiązanie: a) Najpierw wykażmy, że $|BB'| = |CC'|$. W tym celu zauważmy, że $O_A^{60^o}(C) = B'$ oraz $O_A^{60^o}(C') = B$. Stąd mamy, że w wyniku obrotu $O_A^{60^o}$ odcinek CC' przejdzie nam na BB'. Obrót to izometria, więc $|BB' = |CC'||$ W ten sam sposób wykazujemy, że $|AA'| = |BB'|$. Zatem $|AA'| = |BB'| = |CC'|$.

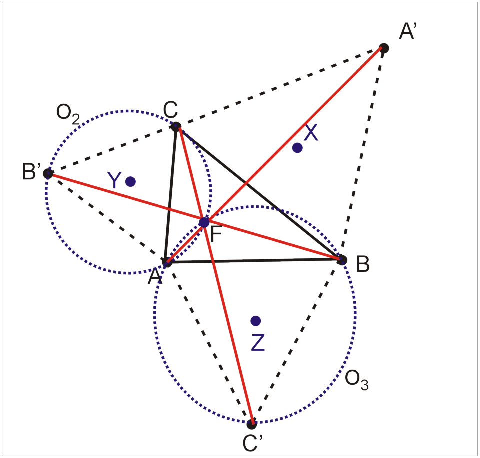
b) Niech punkt F będzie przecięciem odcinków BB' z CC'. Można prosto udowodnić, że prosta oraz jej obraz, powstały w wyniku rotacji, przecinają się pod takim samym kątem jak kąt rotacji.



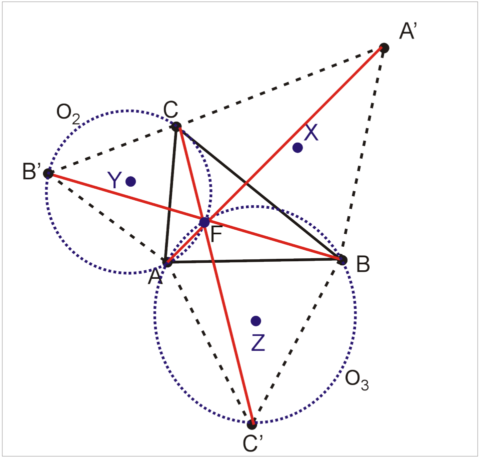
c-d) Rozważmy okręgi o_2, o_3. Udowodnimy, że przecinają się w punkcie F.



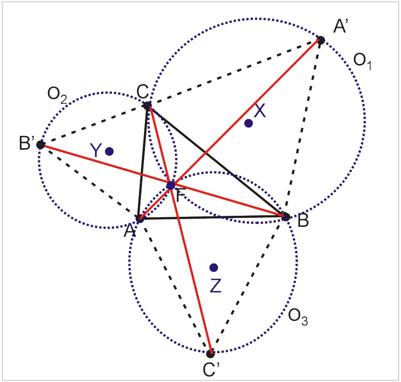
c-d) Rozważmy okręgi o_2, o_3. Udowodnimy, że przecinają się w punkcie F. Z faktu, że $\angle C'AB = 60^o = \angle C'FB$ i $\angle ACB' = 60^o = \angle AFB' = 60^o$ oraz na podstawie własności, że kąty wpisane oparte na tym samym łuku okręgu mają równe miary wynika, że $F \in o_2$ i $F \in o_3$.



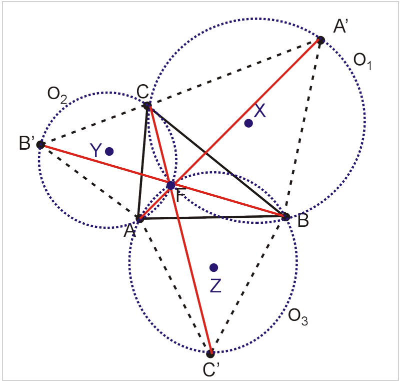
c-d) Rozważmy okręgi o_2, o_3. Udowodnimy, że przecinają się w punkcie F. Z faktu, że $\angle C'AB = 60^o = \angle C'FB$ i $\angle ACB' = 60^o = \angle AFB' = 60^o$ oraz na podstawie własności, że kąty wpisane oparte na tym samym łuku okręgu mają równe miary wynika, że $F \in o_2$ i $F \in o_3$. Zatem punkt F leży na przecięciu okręgów o_2 z o_3.



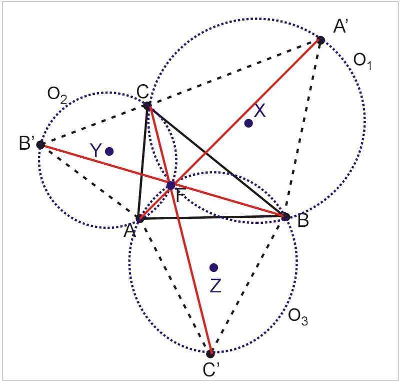
Zauważmy, że $\angle BFC = 120^o$ (jako przyległy do $\angle BFC' = 60^o$.) Wówczas z faktu, że $\angle BA'C = 60^o$ na czworokącie $BA'CF$ można opisać okrąg (oznaczmy przez o_3) co oznacza, że punkt F leży również na o_1.



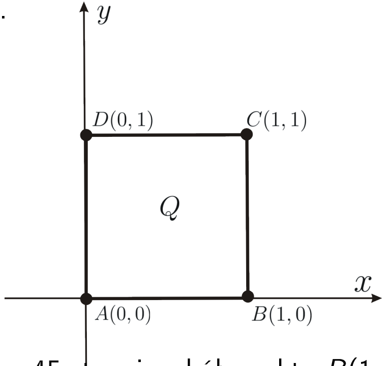
Zauważmy, że $\angle BFC = 120^o$ (jako przyległy do $\angle BFC' = 60^o$.) Wówczas z faktu, że $\angle BA'C = 60^o$ na czworokącie $BA'CF$ można opisać okrąg (oznaczmy przez o_3) co oznacza, że punkt F leży również na o_1. Pozostało wykazać jeszcze, że $A \in FA'$, co możemy zrobić przeprowadzając dowód jeszcze raz zaczynając np. od oznaczenia, że punkt G jest przecięciem odcinków AA' i BB'.



Zauważmy, że $\angle BFC = 120^o$ (jako przyległy do $\angle BFC' = 60^o$.) Wówczas z faktu, że $\angle BA'C = 60^o$ na czworokącie $BA'CF$ można opisać okrąg (oznaczmy przez o_3) co oznacza, że punkt F leży również na o_1. Pozostało wykazać jeszcze, że $A \in FA'$, co możemy zrobić przeprowadzając dowód jeszcze raz zaczynając np. od oznaczenia, że punkt G jest przecięciem odcinków AA' i BB'. Udowodnimy wówczas, że G należy do okręgów o_1, o_2, o_3 co oznacza, że $G = F$ i $A \in FA'$.

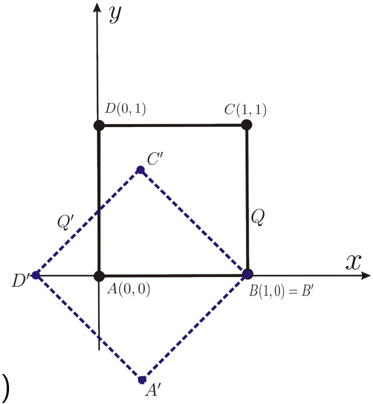


Zadanie 2. (patrz XII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne)
Niech punkty $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ i $D(0,1)$ będą wierzchołkami kwadratu Q o boku 1.



Obracamy kwadrat Q o 45 stopni wokół punktu $B(1,0)$, przeciwko ruchowi wskazówek zegara, i otrzymujemy kwadrat Q'. Następnie obracamy kwadrat Q' o 45 stopni wokół punktu $D(0,1)$, też przeciwko ruchowi wskazówek zegara, i otrzymujemy kwadrat Q''. (Tym razem środek obrotu $D(0,1)$ nie jest wierzchołkiem kwadratu Q'.)
Porównując kwadraty Q i Q'', stwierdzamy że jeden z punktów wnętrza kwadratu Q powrócił na swoje miejsce. Podaj współrzędne tego punktu.

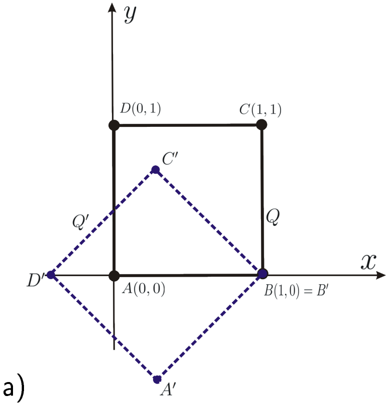
Rozwiązanie:(I sposób) Zgodnie z treścią zadania najpierw obracamy kwadrat Q wokół wierzchołka B o kąt 45 stopni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara otrzymując kwadrat Q'- niebieski (patrz rysunek 1a).



a)

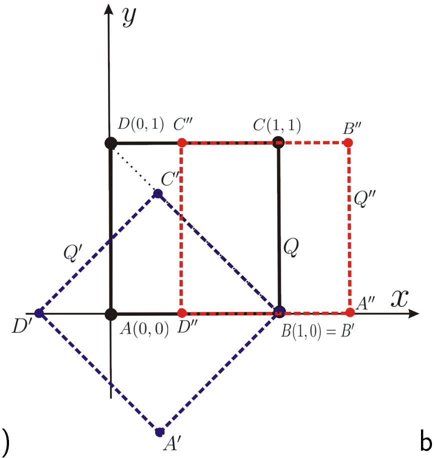
Rysunek: 1

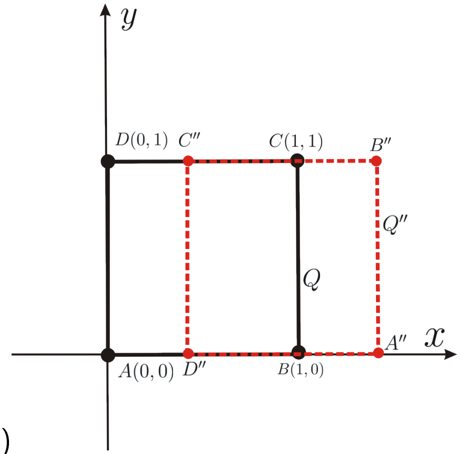
Rozwiązanie:(I sposób) Zgodnie z treścią zadania najpierw obracamy kwadrat Q wokół wierzchołka B o kąt 45 stopni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara otrzymując kwadrat Q'- niebieski (patrz rysunek 1a). Następnie kwadrat niebieski Q' obracamy o 45 stopni wokół punktu $D(0,1)$, też przeciwko ruchowi wskazówek zegara, i otrzymujemy kwadrat $Q''-$czerwony (patrz rysunek 1b).



Rysunek: 1

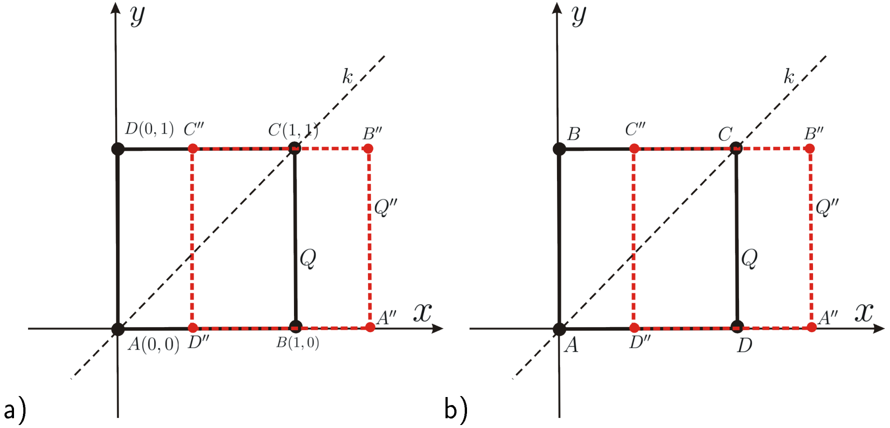
Zauważmy że punkt C' leży na przekątnej BD kwadratu Q oraz odległość $|DC'| = \sqrt{2} - 1$. Zatem współrzędne punktu $C''(\sqrt{2} - 1, 1)$ (patrz rysunek 2). W celu wyznaczenia punktu, który powrócił na swoje miejsce rozważamy kwadraty Q i Q''.





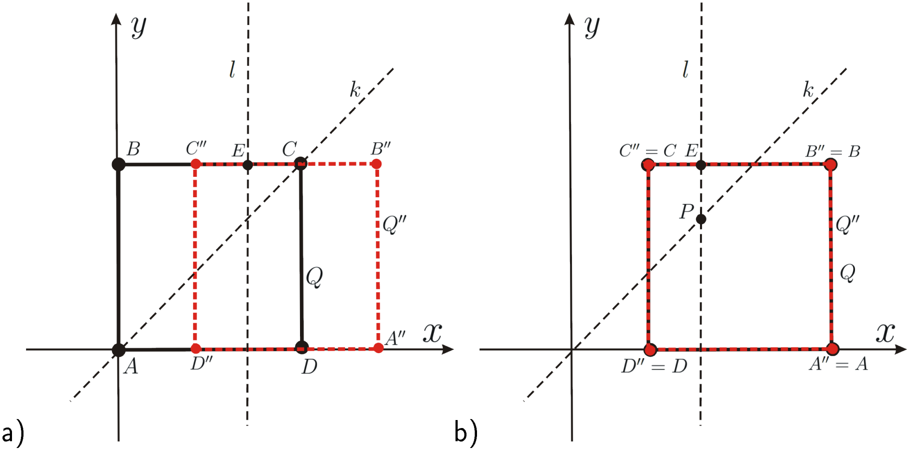
Rysunek: 2

Dokonamy przekształcenia kwadratu Q do Q'' tym razem za pomocą dwóch symetrii osiowych względem pewnych prostych. Pierwsze z nich jest to odbicie względem prostej k będącej przekątną AC (patrz rysunek 3a). W rezultacie dostajemy czarny kwadrat taki jak na rysunku 3b). Zauważmy ponadto, że prosta k ma równanie $y = x$.



Rysunek: 3

Drugim jest odbicie nowego kwadratu Q względem prostej l (patrz rysunek 4a) będącej symetralną odcinka CC'' dzięki czemu odpowiednie wierzchołki kwadratu Q pokryją się z odpowiednimi wierzchołkami kwadratu Q'' (patrz rysunek 4b).



Rysunek: 4

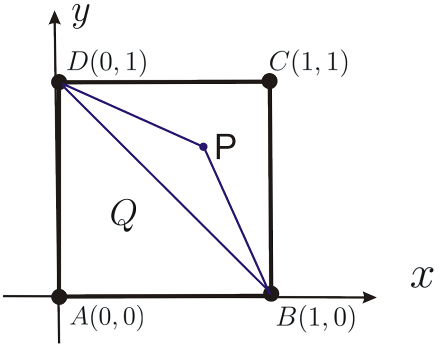
Ponadto widzimy, że jedynym punktem, który nie zmienił swojego położenia jest punkt P na przecięciu prostej k z prostą l. W celu wyznaczenia jego współrzędnych znajdziemy najpierw współrzędne punktu E będącego przecięciem prostej k z odcinkiem CC''. Ze średniej arytmetycznej dla pierwszych współrzędnych (lub długości odpowiednich odcinków):

$$x_E = \frac{x_{C''} + x_C}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1 + 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

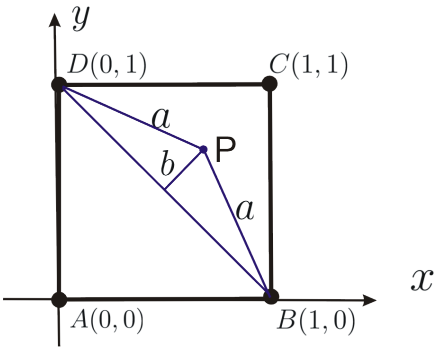
Wówczas $E = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$. Stąd oraz z faktu, że prosta k ma równanie $y = x$ współrzędne punktu P to:

$$P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

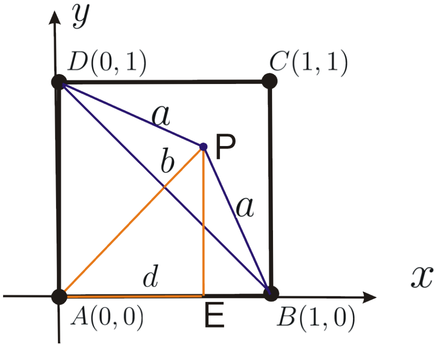
Zadanie 2(sposób 2) Na mocy wiedzy o złożeniach obrotów poszukujemy współrzędnych punktu P. Trójkąt DBP jest równoramienny i kąt przy wierzchołku P wynosi 135^o.



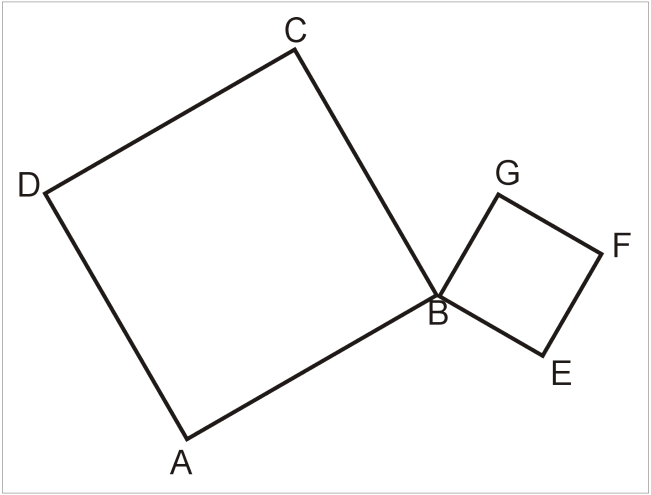
Zadanie 2(sposób 2) Na mocy wiedzy o złożeniach obrotów poszukujemy współrzędnych punktu P. Trójkąt DBP jest równoramienny i kąt przy wierzchołku P wynosi 135^o. Wówczas z tw. cosinusów do trójkąta DBP otrzymujemy, że $a^2 = 2 - \sqrt{2}$. Teraz z tw. Pitagorasa dla połowy trójkąta DBP wyznaczamy, że $b = \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}$.



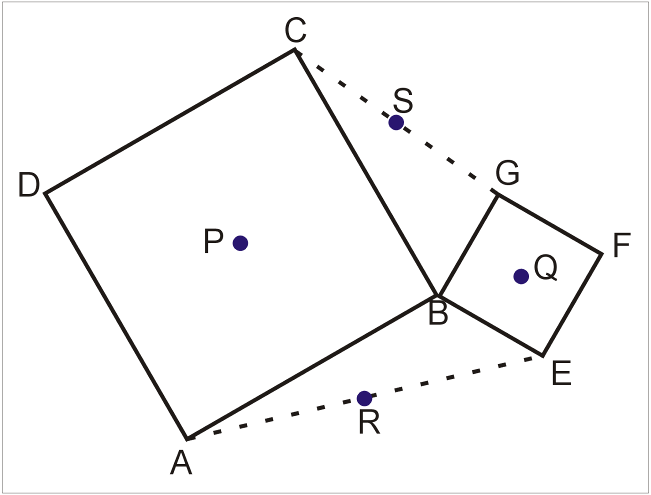
Zadanie 2(sposób 2) Na mocy wiedzy o złożeniach obrotów poszukujemy współrzędnych punktu P. Trójkąt DBP jest równoramienny i kąt przy wierzchołku P wynosi 135^o. Wówczas z tw. cosinusów do trójkąta DBP otrzymujemy, że $a^2 = 2 - \sqrt{2}$. Teraz z tw. Pitagorasa dla połowy trójkąta DBP wyznaczamy, że $b = \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}$.Następnie z tw. Pitagorasa dla $\triangle APE$ dostajemy $d = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}}$ co jest równe $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Zatem $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.



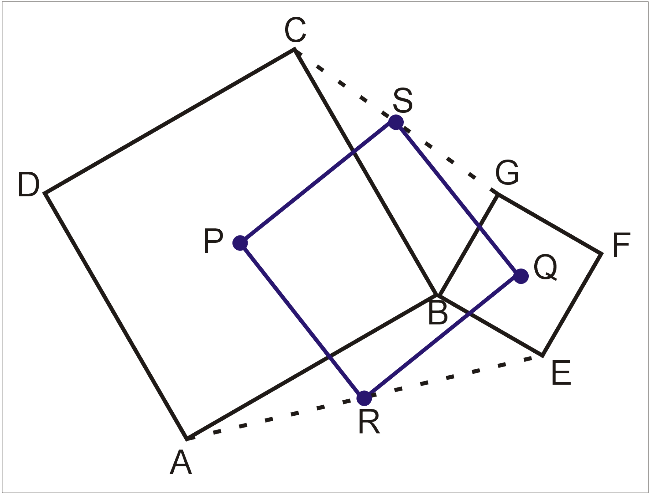
Zadanie 3. Niech będą dane dwa kwadraty $ABCD$ i $BEFG$ o wspólnym wierzchołku w punkcie B.

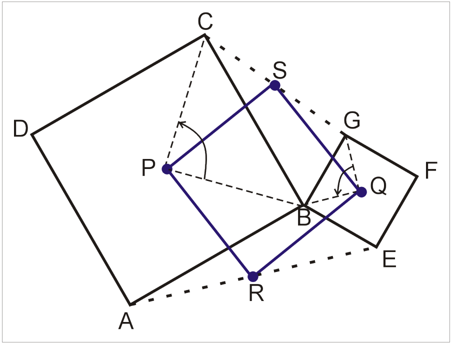


Zadanie 3. Niech będą dane dwa kwadraty *ABCD* i *BEFG* o wspólnym wierzchołku w punkcie *B*. Ponadto, niech punkty *P*, *Q* będą odpowiednio środkami kwadratów *ABCD*, *BEFG*, a punkty *R*, *S* odpowiednio środkami odcinków *AE*, *CG*.

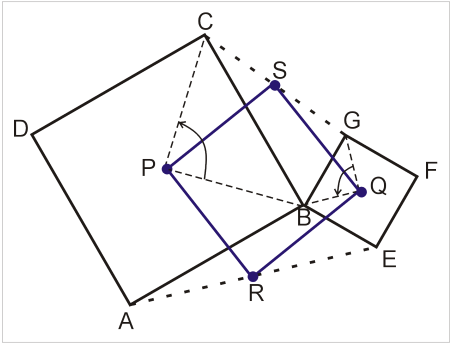


Zadanie 3. Niech będą dane dwa kwadraty $ABCD$ i $BEFG$ o wspólnym wierzchołku w punkcie B. Ponadto, niech punkty P, Q będą odpowiednio środkami kwadratów $ABCD$, $BEFG$, a punkty R, S odpowiednio środkami odcinków AE, CG. Wykazać, że czworokąt $PRQS$ jest kwadratem.

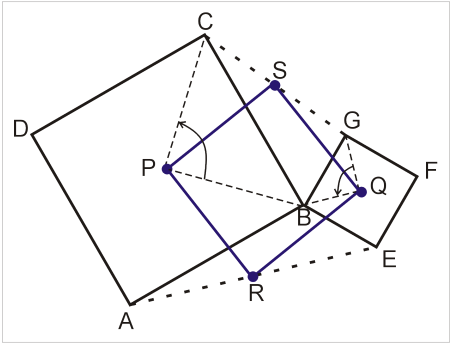




Rozwiązanie: Rozważmy obroty $O_P^{90^o}$, $O_Q^{90^o}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

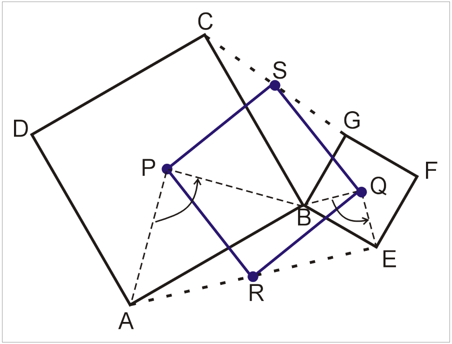


Rozwiązanie: Rozważmy obroty $O_P^{90^o}$, $O_Q^{90^o}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Ponieważ $O_Q^{90^o}(G) = B$ oraz $O_P^{90^o}(B) = C$, więc złożenie $(O_P^{90^o} \circ O_Q^{90^o})(G) = O_P^{90^o}(O_Q^{90^o}(G)) = O_P^{90^o}(B) = C$.

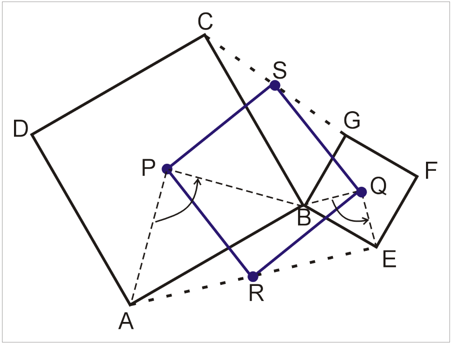


Rozwiązanie: Rozważmy obroty $O_P^{90^o}$, $O_Q^{90^o}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Ponieważ $O_Q^{90^o}(G) = B$ oraz $O_P^{90^o}(B) = C$, więc złożenie $(O_P^{90^o} \circ O_Q^{90^o})(G) = O_P^{90^o}(O_Q^{90^o}(G)) = O_P^{90^o}(B) = C$.

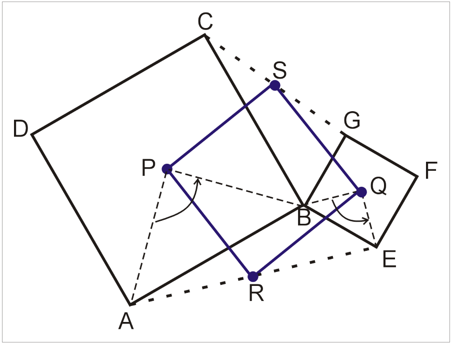
Z drugiej strony wiemy, że $O_P^{90^o} \circ O_Q^{90^o} = O_X^{180^o}$, gdzie $\angle XQP = \angle QPX = 45^o$. Zatem złożenie $O_P^{90^o} \circ O_Q^{90^o}$ jest symetrią środkową. Z faktu, że S jest środkiem odcinka CG wynika, że $X = S$. Ponadto $\triangle PSQ$ jest równoramiennym trójkątem prostokątnym.



Rozważmy teraz złożenie $O_Q^{90^o} \circ O_P^{90^o}$, mamy że
$(O_Q^{90^o} \circ O_P^{90^o})(A) = O_Q^{90^o}(O_P^{90^o}(A)) = O_Q^{90^o}(B) = E$.



Rozważmy teraz złożenie $O_Q^{90^o} \circ O_P^{90^o}$, mamy że $(O_Q^{90^o} \circ O_P^{90^o})(A) = O_Q^{90^o}(O_P^{90^o}(A)) = O_Q^{90^o}(B) = E$. Ponadto istnieje punkt Y taki, że $O_Y^{180^o}(A) = E$.



Rozważmy teraz złożenie $O_Q^{90^o} \circ O_P^{90^o}$, mamy że $(O_Q^{90^o} \circ O_P^{90^o})(A) = O_Q^{90^o}(O_P^{90^o}(A)) = O_Q^{90^o}(B) = E$. Ponadto istnieje punkt Y taki, że $O_Y^{180^o}(A) = E$. Analogicznie jak wcześniej dowodzimy, że $Y = R$ oraz $\triangle PQR$ jest trójkątem równoramiennym prostokątnym. Zatem czworokąt $PRQS$ jest kwadratem.

Literatura

1. Piotr Grzeszczuk, "*Obroty w zadaniach geometrycznych*," czasopismo Delta, październik 2004.
2. strona internetowa: https://www.math.washington.edu/ king/coursedir/m444a03/notes/12-05-Napoleon-Fermat.html
3. strona internetowa: http://www.mat.umk.pl/rkm/
4. Dorota Jacak, Monika Jacak, "Elementy izometrii dla architektów", skrypt dla studentów politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2013.