

O pewnym renesansowym matematycznym pojedynku i jego konsekwencjach

Damian Wiśniewski

SPOTKANIA Z MATEMATYKĄ, 12.05.2016 r.



Bohaterowie:



Luca Pacioli



Niccolo Fontana Taraglia



Scipione del Ferro



Girolamo Cardano





Luca Pacioli

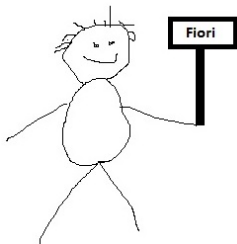
Najwybitniejszym algebraikiem przełomu XV i XVI stulecia był Luca Paciolo, mnich i jednocześnie profesor matematyki, przyjaciel Leonardo da Vinci. Jedną z jego książek "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionaliti*" w podsumowaniu zawierała stwierdzenie, że na rozwiązanie równań postaci

$$x^3 + ax = b, \quad x^3 + b = ax, \quad a, b > 0$$

algebra nie podała jeszcze sposobu. Stwierdzenie to stało się wyzwaniem dla ówczesnych włoskich matematyków.



Scipione del Ferro

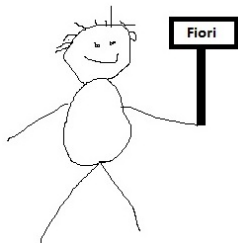


Pierwszą osobą, której udało się znaleźć rozwiązanie równania $x^3 + ax = b$ był boloński profesor del Ferro. Dopiero na łożu śmierci wyjawiał tajemnicę swojemu uczniowi Fiorowi. Fiori nie zamierzał nikomu zdradzić przepisu na rozwiązywanie wspomnianych równań. Zaczął się jedynie przechwalać umiejętnością znajdowania pierwiastków równań trzeciego stopnia i wyzywać kolejnych śmiałków na matematyczne pojedynki. W końcu w lutym 1535 roku trafił na przeciwnika lepszego od siebie.

Okazał się nim 35letni matematyk samouk Nicolo Fontana (Tartaglia) - syn biednego gońca poczty konnej; w dzieciństwie ranny w gardło przez Francuzów - mówił z trudem, stąd wzięło się jego przezwisko "tartaglia". Po śmierci ojca matka wysłała go do szkoły, ale pieniędzy zabrakło, gdy nauka doszło do litery "k". Sam nauczył się czytania i pisania, łaciny, greki oraz matematyki.



Niccolo Fontana Tartaglia



Niccolo Fontana Tartaglia

Pojedynek był związany z poszukiwaniem przez uniwersytet w Weronie profesora matematyki. Uczestnicy mieli zadać sobie po 30 równań do rozwiązania. Wszystkie zadania opracowane przez Fioriego sprowadzały się do równań typu $x^3 + ax = b$. Na osiem dni przed terminem turnieju Tartaglia odkrył metodę rozwiązywania równań trzeciego stopnia i w dwie godziny rozwiązał wszystkie zadania. Fiori nie potrafił rozwiązać żadnego z zadań Tartaglii sprowadzających się do równań postaci $x^3 = ax + b$. Efektem spektakularnego zwycięstwa było objęcie stanowiska kierownika katedry i zdobycie wielkiego uznania wśród matematyków.



Girolamo Cardano

Girolamo Cardano - syn znanego prawnika, uczony o wszechstronnych zainteresowaniach: matematyk, mechanik, astrolog, filozof i lekarz (profesor matematyki i medycyny)

Kilka ciekawostek :

- namiętnie uprawiał hazard i w 1570 r. znalazł się w więzieniu za długi
- z horoskopów Cardano korzystał sam papież
- Cardano ułożył własny horoskop, w którym przewidział datę własnej śmierci; kiedy ten dzień nadszedł, powiesił się, aby zachować sławę astrologa
- w 1663 roku napisał autobiografię "*O moim życiu*"
- spis autorski jego wszystkich dzieł stanowił osobną księgę "*O moich dziełach*"



Girolamo Cardano



Niccolo Fontana Tartaglia

Wiść o zwycięskim pojedynku Tartaglii szybko dotarła do Cardano. Ten podjął próby odkrycia sekretu Tartaglii, okazało się to jednak bezskuteczne. Zamierzał on bowiem przedstawić go w przyszłości w większym dziele.

Cardano kilkakrotnie kontaktował się z Tartaglią, w końcu namówił go na przyjazd. Gościł go, obdarowywał, raczył smakołykami i pochlebstwami. W końcu namówił Niccolo przysięgając dochowania tajemnicy słowami : *"I swear to you, by God's holy Gospels, and as a true man of honour, not only never to publish your discoveries, if you teach me them, but I also promise you, and I pledge my faith as a true Christian, to note them down in code, so that after my death no one will be able to understand them"*.

Tartaglia zdradził mu sposób rozwiązywania równania podając go w postaci wiersza, którego pierwsze słowa brzmiały : *"Kiedy szczęścian z rzeczami razem równe są jakiejś liczbie, znajdą się dwie inne na nią rozdzielające się..."*.

Metoda Tartaglii, Cardano, Bombelliiego

Mamy dane równanie

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

Dokonując podstawienia (stosował je Cardano)

$$x = y - \frac{a}{3}$$

sprowadzimy równanie (1) do postaci

$$y^3 = py + q \quad \text{gdzie } p = \frac{a^2}{3} - b, \quad q = -\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right). \quad (2)$$

Pomysł Tartaglii polegał na tym, by poszukiwać y jako sumę $u + v$. Dzięki temu pokazał on, że równanie (2) ma rozwiązanie

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

$$x^3 = px + q, \quad x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Przykład nr 1: $x^3 = 3x + 2$

Przykład nr 2: $x^3 = 15x + 4$ (*casus irreducibilis (przypadek nieprzywiedlny)*)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})^3} \\ &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = 4. \end{aligned}$$

Przykłady zastosowań liczb zespolonych

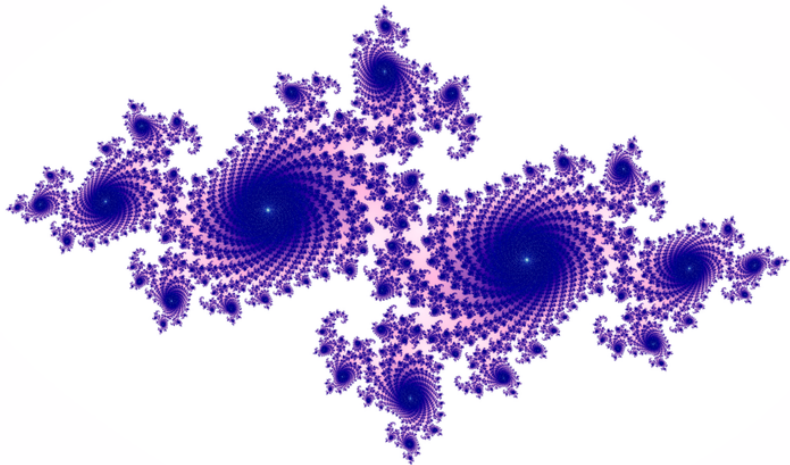
- jako zgrabny zapis pewnych operacji na wektorach w przestrzeni dwuwymiarowej na płaszczyźnie
- w fizyce *zespolony współczynnik załamania* to wielkość składająca się z dwóch części : rzeczywistej - odpowiedzialnej za zjawisko załamania fali padającej na granicę dwóch ośrodków i urojonej - która odpowiada za zjawisko absorpcji
- do opisu zjawisk fizycznych takich jak ciepło, elektryczność, aerodynamika
- jako prostsza droga przy pewnych przekształceniach matematycznych (możemy na jakiś czas opuścić realny świat, wykonać magiczne obliczenia w świecie urojonym i wrócić z rzeczywistym wynikiem)

Zdefiniujmy dla danej liczby zespolonej c oraz danego punktu p na płaszczyźnie zespolonej nieskończony ciąg liczb zespolonych $z_0, z_1, z_2, \dots$ określony następująco:

$$z_0 = p, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

Okazuje się, że w zależności od punktu startu możemy w wyniku iteracji otrzymać ciąg, który będzie bądź nieograniczony (jego elementy opuszczają każdy okrąg ze środkiem w początku układu współrzędnych) bądź też będzie ograniczony (czyli taki, dla którego istnieje okrąg - o środku w początku układu współrzędnych - jakiego elementy ciągu nigdy nie opuszczają). Zbiór Julii definiujemy jako zbiór liczb zespolonych p takich, że powyższy ciąg jest ograniczony.

$$c = -0,73 + 0,19i$$



$$c = -0,1 + 0,65i$$

