WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

Nierówność trójkąta i „paradoks bliźniąt” w szczególnej teorii względności

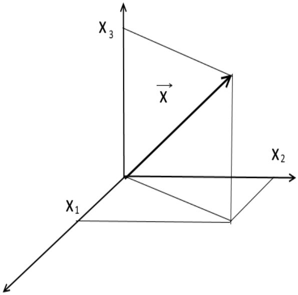
Wykład popularny, 2.06.2016

Andriy Panasyuk

Katedra Algebry i Geometrii, WMiI

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

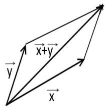
Oznaczenia: $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych (jego elementy $\alpha \in \mathbb{R}$ nazywamy *skalarami*)
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ (jego elementy $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ nazywamy *wektorami*)



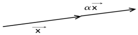
Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Działania na wektorach: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- Dodawanie wektorów: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$



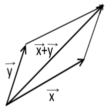
- Mnozenie wektora przez skalar: $\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$



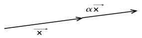
Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Działania na wektorach: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- Dodawanie wektorów: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$



- Mnozenie wektora przez skalar: $\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$



Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Standardowy (euklidesowy) iloczyn skalarny wektorów

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3) $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha (\vec{x} \cdot \vec{y})$

(2a) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3a) $\vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha (\vec{x} \cdot \vec{y})$

(4) $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ - długość (euklidesowa) wektora $\vec{x}$ (oznaczana $|\vec{x}|$)

(5) $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \phi$ (m.in. $\vec{x}$ i $\vec{y}$ prostopadłe $\Longleftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$)

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Standardowy (euklidesowy) iloczyn skalarny wektorów

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3) $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$

(2a) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3a) $\vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$

(4) $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ - długość (euklidesowa) wektora $\vec{x}$ (oznaczana $|\vec{x}|$)

(5) $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \phi$ (m.in. $\vec{x}$ i $\vec{y}$ prostopadłe $\iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$)

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Standardowy (euklidesowy) iloczyn skalarny wektorów

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3) $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$

(2a) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3a) $\vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$

(4) $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ - długość (euklidesowa) wektora $\vec{x}$ (oznaczana $|\vec{x}|$)

(5) $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \phi$ (m.in. $\vec{x}$ i $\vec{y}$ prostopadłe $\iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$)

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Standardowy (euklidesowy) iloczyn skalarny wektorów
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3) $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$

(2a) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3a) $\vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$

(4) $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ - długość (euklidesowa) wektora $\vec{x}$ (oznaczana $|\vec{x}|$)

(5) $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\phi$ (m.in. $\vec{x}$ i $\vec{y}$ prostopadłe $\Longleftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$)

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Standardowy (euklidesowy) iloczyn skalarny wektorów

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3) $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha (\vec{x} \cdot \vec{y})$

(2a) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3a) $\vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha (\vec{x} \cdot \vec{y})$

(4) $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ - długość (euklidesowa) wektora $\vec{x}$ (oznaczana $|\vec{x}|$)

(5) $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \phi$ (m.in. $\vec{x}$ i $\vec{y}$ prostopadłe $\Longleftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$)

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Standardowy (euklidesowy) iloczyn skalarny wektorów
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$
(3) $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$
(2a) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$
(3a) $\vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$
(4) $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ - długość (euklidesowa) wektora $\vec{x}$ (oznaczana $|\vec{x}|$)
(5) $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\phi$ (m.in. $\vec{x}$ i $\vec{y}$ prostopadłe $\Longleftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$)

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Standardowy (euklidesowy) iloczyn skalarny wektorów

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3) $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$

(2a) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3a) $\vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$

(4) $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ - długość (euklidesowa) wektora $\vec{x}$ (oznaczana $|\vec{x}|$)

(5) $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\phi$ (m.in. $\vec{x}$ i $\vec{y}$ prostopadłe $\iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$)

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Standardowy (euklidesowy) iloczyn skalarny wektorów

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3) $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$

(2a) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(3a) $\vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$

(4) $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ - długość (euklidesowa) wektora $\vec{x}$ (oznaczana $|\vec{x}|$)

(5) $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \phi$ (m.in. $\vec{x}$ i $\vec{y}$ prostopadłe $\iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$)

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Własności iloczynu skalarnego:

(6) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ (nierówność Cauchy'ego)

(7) $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (nierówność trójkąta)

(8) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ $(= 0 \iff \vec{x} = 0)$

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Własności iloczynu skalarnego:

(6) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ (nierówność Cauchy'ego)

(7) $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (nierówność trójkąta)

(8) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ $(= 0 \iff \vec{x} = 0)$

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa

Własności iloczynu skalarnego:

(6) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ (nierówność Cauchy'ego)

(7) $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (nierówność trójkąta)

(8) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ $(= 0 \iff \vec{x} = 0)$

Trójwymiarowa przestrzeń Minkowskiego

Jest to ta sama przestrzeń $\mathbb{R}^3$, ale tym razem *wyposażona w niestandardowy (lorentzowski) iloczyn skalarny* wektorów $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \circ \vec{y} = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności tego iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \circ \vec{y} = \vec{y} \circ \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \circ \vec{z} = \vec{x} \circ \vec{z} + \vec{y} \circ \vec{z}$

(3) $(\alpha \vec{x}) \circ \vec{y} = \alpha(\vec{x} \circ \vec{y})$

(2a) $\vec{x} \circ (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \circ \vec{z} + \vec{y} \circ \vec{z}$

(3a) $\vec{x} \circ (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \circ \vec{y})$

(4-7) ???

(8) $\vec{x} \circ \vec{y} \geq 0$ - nie zachodzi

Przykłady: dla $\vec{x} = (1, 1, 0)$ mamy $\vec{x} \circ \vec{x} = 1 - 1 + 0 = 0$, a dla $\vec{x} = (0, 1, 0), \vec{x} \circ \vec{x} = 0 - 1 + 0 = -1$

Trójwymiarowa przestrzeń Minkowskiego

Jest to ta sama przestrzeń $\mathbb{R}^3$, ale tym razem *wyposażona w niestandardowy (lorentzowski) iloczyn skalarny* wektorów $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \circ \vec{y} = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności tego iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \circ \vec{y} = \vec{y} \circ \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \circ \vec{z} = \vec{x} \circ \vec{z} + \vec{y} \circ \vec{z}$

(3) $(\alpha \vec{x}) \circ \vec{y} = \alpha(\vec{x} \circ \vec{y})$

(2a) $\vec{x} \circ (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \circ \vec{z} + \vec{y} \circ \vec{z}$

(3a) $\vec{x} \circ (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \circ \vec{y})$

(4-7) ???

(8) $\vec{x} \circ \vec{y} \geq 0$ - nie zachodzi

Przykłady: dla $\vec{x} = (1, 1, 0)$ mamy $\vec{x} \circ \vec{x} = 1 - 1 + 0 = 0$, a dla $\vec{x} = (0, 1, 0), \vec{x} \circ \vec{x} = 0 - 1 + 0 = -1$

Trójwymiarowa przestrzeń Minkowskiego

Jest to ta sama przestrzeń $\mathbb{R}^3$, ale tym razem *wyposażona w niestandardowy (lorentzowski) iloczyn skalarny* wektorów $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \circ \vec{y} = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności tego iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \circ \vec{y} = \vec{y} \circ \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \circ \vec{z} = \vec{x} \circ \vec{z} + \vec{y} \circ \vec{z}$

(3) $(\alpha \vec{x}) \circ \vec{y} = \alpha(\vec{x} \circ \vec{y})$

(2a) $\vec{x} \circ (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \circ \vec{z} + \vec{y} \circ \vec{z}$

(3a) $\vec{x} \circ (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \circ \vec{y})$

(4-7) ???

(8) $\vec{x} \circ \vec{y} \geq 0$ - nie zachodzi

Przykłady: dla $\vec{x} = (1, 1, 0)$ mamy $\vec{x} \circ \vec{x} = 1 - 1 + 0 = 0$, a dla $\vec{x} = (0, 1, 0), \vec{x} \circ \vec{x} = 0 - 1 + 0 = -1$

Trójwymiarowa przestrzeń Minkowskiego

Jest to ta sama przestrzeń $\mathbb{R}^3$, ale tym razem *wyposażona w niestandardowy (lorentzowski) iloczyn skalarny* wektorów $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

- $\vec{x} \circ \vec{y} = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \in \mathbb{R}$ (skalar)

Własności tego iloczynu skalarnego:

(1) $\vec{x} \circ \vec{y} = \vec{y} \circ \vec{x}$

(2) $(\vec{x} + \vec{y}) \circ \vec{z} = \vec{x} \circ \vec{z} + \vec{y} \circ \vec{z}$

(3) $(\alpha \vec{x}) \circ \vec{y} = \alpha(\vec{x} \circ \vec{y})$

(2a) $\vec{x} \circ (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \circ \vec{z} + \vec{y} \circ \vec{z}$

(3a) $\vec{x} \circ (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \circ \vec{y})$

(4-7) ???

(8) $\vec{x} \circ \vec{y} \geq 0$ - nie zachodzi

Przykłady: dla $\vec{x} = (1, 1, 0)$ mamy $\vec{x} \circ \vec{x} = 1 - 1 + 0 = 0$, a dla $\vec{x} = (0, 1, 0), \vec{x} \circ \vec{x} = 0 - 1 + 0 = -1$

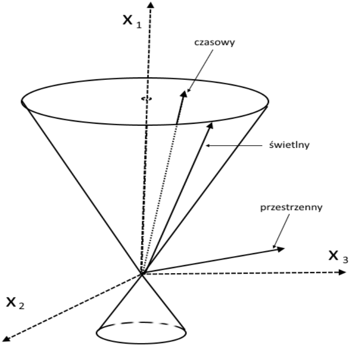
Trójwymiarowa przestrzeń Minkowskiego

Wektor $\vec{x}$ nazywamy

- *czasowym*, jeśli $\vec{x} \circ \vec{x} > 0$
- *świetlnym*, jeśli $\vec{x} \circ \vec{x} = 0$
- *przestrzennym*, jeśli $\vec{x} \circ \vec{x} < 0$

Wektory świetlne tworzą stożek nazywany *stożkiem świetlnym*:

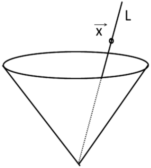
$\vec{x} \circ \vec{x} = 0 \iff x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \iff x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$



Interpretacja fizyczna przestrzeni Minkowskiego

Czterowymiarowa p. Minkowskiego $\mathbb{R}^4$ z iloczynem $\vec{x} \circ \vec{y} = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4$ jest „czasoprzestrzenią” szczególnej teorii względności. W szczególności:

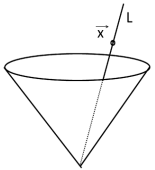
- Punkt $\vec{x}$ p. Minkowskiego odpowiada zlokalizowanemu w czasie i przestrzeni zdarzeniu fizycznemu (np. zderzenie dwóch cząstek elementarnych).
- Proste L składające sie z wektorów czasowych są „liniami świata obserwatorów inercjalnych” (odpowiadają np. zbiorowi zdarzeń na statku kosmicznym, który porusza się swobodnie, czyli z wyłączonymi silnikami z dala od ciał niebieskich).



Interpretacja fizyczna przestrzeni Minkowskiego

Czterowymiarowa p. Minkowskiego $\mathbb{R}^4$ z iloczynem $\vec{x} \circ \vec{y} = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4$ jest „czasoprzestrzenią" szczególnej teorii względności. W szczególności:

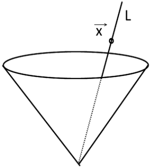
- Punkt $\vec{x}$ p. Minkowskiego odpowiada zlokalizowanemu w czasie i przestrzeni zdarzeniu fizycznemu (np. zderzenie dwóch cząstek elementarnych).
- Proste L składające sie z wektorów czasowych są „liniami świata obserwatorów inercjalnych" (odpowiadają np. zbiorowi zdarzeń na statku kosmicznym, który porusza się swobodnie, czyli z wyłączonymi silnikami z dala od ciał niebieskich).



Interpretacja fizyczna przestrzeni Minkowskiego

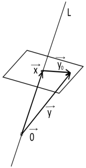
Czterowymiarowa p. Minkowskiego $\mathbb{R}^4$ z iloczynem $\vec{x} \circ \vec{y} = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4$ jest „czasoprzestrzenią" szczególnej teorii względności. W szczególności:

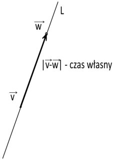
- Punkt $\vec{x}$ p. Minkowskiego odpowiada zlokalizowanemu w czasie i przestrzeni zdarzeniu fizycznemu (np. zderzenie dwóch cząstek elementarnych).
- Proste L składające sie z wektorów czasowych są „liniami świata obserwatorów inercjalnych" (odpowiadają np. zbiorowi zdarzeń na statku kosmicznym, który porusza się swobodnie, czyli z wyłączonymi silnikami z dala od ciał niebieskich).



Interpretacja fizyczna przestrzeni Minkowskiego

- Zbiór wektorów $\vec{y}$ „prostopadłych” do L w punkcie $\vec{x} \in L$ (czyli wektorów postaci $\vec{y} = \vec{x} + \vec{y}_0$, gdzie $\vec{y}_0 \circ \vec{x} = 0$) odpowiada przestrzeni fizycznej obserwatora inercjalnego.



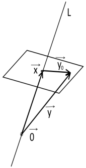


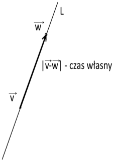
- Czas własny obserwatora inercjalnego pomiędzy zdarzeniami $\vec{v} \in L$ i $\vec{w} \in L$ jest równy

$$|\vec{w} - \vec{v}| = \sqrt{(\vec{w} - \vec{v}) \circ (\vec{w} - \vec{v})} \text{ (przypomnijmy } \vec{w} - \vec{v} \text{ czasowy)}$$

Interpretacja fizyczna przestrzeni Minkowskiego

- Zbiór wektorów $\vec{y}$ „prostopadłych” do L w punkcie $\vec{x} \in L$ (czyli wektorów postaci $\vec{y} = \vec{x} + \vec{y}_0$, gdzie $\vec{y}_0 \circ \vec{x} = 0$) odpowiada przestrzeni fizycznej obserwatora inercjalnego.





- Czas własny obserwatora inercjalnego pomiędzy zdarzeniami $\vec{v} \in L$ i $\vec{w} \in L$ jest równy

$$|\vec{w} - \vec{v}| = \sqrt{(\vec{w} - \vec{v}) \circ (\vec{w} - \vec{v})} \text{ (przypomnijmy } \vec{w} - \vec{v} \text{ czasowy)}$$

„Paradoks bliźniąt”

Odwrócona nierówność Cauchy'ego: Niech $\vec{x}$ i $\vec{y}$ będą wektorami czasowymi. Wtedy

$$|\vec{x} \circ \vec{y}| \geq |\vec{x}||\vec{y}|$$

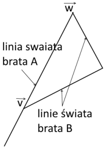
przy czym równość zachodzi tylko dla współliniowych $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

Odwrócona nierówność trójkąta: Niech $\vec{x}$ i $\vec{y}$ będą wektorami czasowymi. Wtedy

$$|\vec{x} + \vec{y}| \geq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

przy czym równość zachodzi tylko dla współliniowych $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

„Paradoks bliźniąt”: Czas własny brata A pomiędzy zdarzeniami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest większy niż czas własny brata B.



„Paradoks bliźniąt”

Odwrócona nierówność Cauchy'ego: Niech $\vec{x}$ i $\vec{y}$ będą wektorami czasowymi. Wtedy

$$|\vec{x} \circ \vec{y}| \geq |\vec{x}||\vec{y}|$$

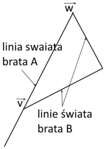
przy czym równość zachodzi tylko dla współliniowych $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

Odwrócona nierówność trójkąta: Niech $\vec{x}$ i $\vec{y}$ będą wektorami czasowymi. Wtedy

$$|\vec{x} + \vec{y}| \geq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

przy czym równość zachodzi tylko dla współliniowych $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

„Paradoks bliźniąt”: Czas własny brata A pomiędzy zdarzeniami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest większy niż czas własny brata B.



„Paradoks bliźniąt"

Odwrócona nierówność Cauchy'ego: Niech $\vec{x}$ i $\vec{y}$ będą wektorami czasowymi. Wtedy

$$|\vec{x} \circ \vec{y}| \geq |\vec{x}||\vec{y}|$$

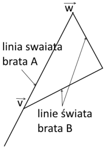
przy czym równość zachodzi tylko dla współliniowych $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

Odwrócona nierówność trójkąta: Niech $\vec{x}$ i $\vec{y}$ będą wektorami czasowymi. Wtedy

$$|\vec{x} + \vec{y}| \geq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

przy czym równość zachodzi tylko dla współliniowych $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

„Paradoks bliźniąt": Czas własny brata A pomiędzy zdarzeniami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest większy niż czas własny brata B.



Dowód odwróconej nierówności Cauchy'ego