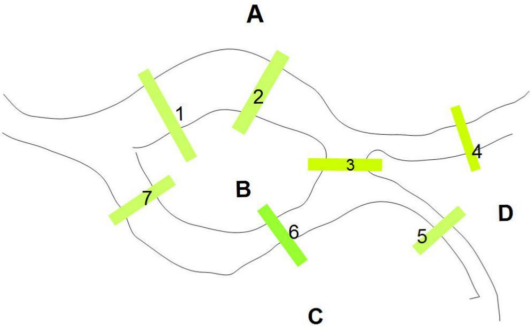
O TYM, JAK LEONHARD EULER SPACEROWAŁ PO MOSTACH W KRÓLEWCU I CO Z TEGO WYNIKŁO...

Bogusław Hajduk

Uniwersytet Warmińsko Mazurski

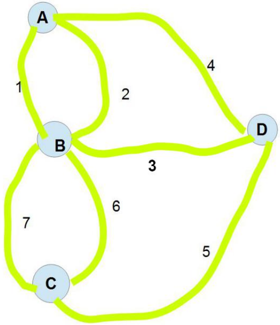
Olsztyn, 23.05.2016

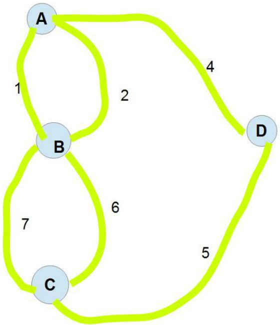
Leonhard Euler (1707 - 1783)

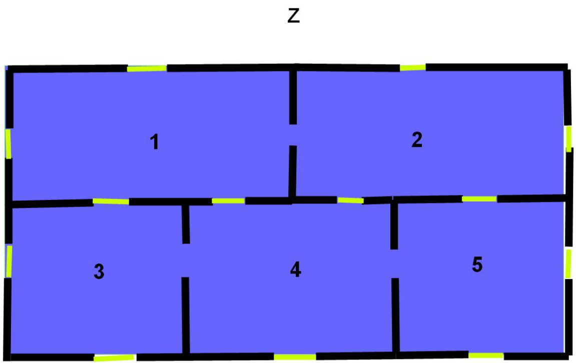

A
1
2
3
4
B
7
6
5
D
C

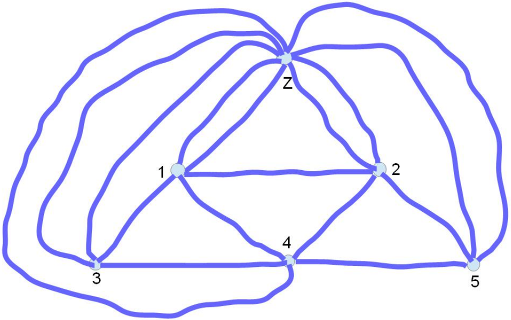
Problem

Czy można przejść wszystkie mosty przechodząc przez każdy tylko raz??


A
B
C
D
1
2
3
4
5
6
7


A
B
C
D
1
2
4
5
6
7


Z
1
2
3
4
5


Z
1
2
4
3
5

CIĄG FIBONACCIEGO

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,.....

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

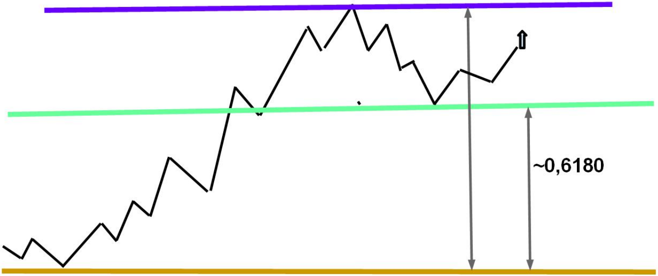
Ciąg ilorazów $\frac{a_n}{a_{n+1}}$:

$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\dots$

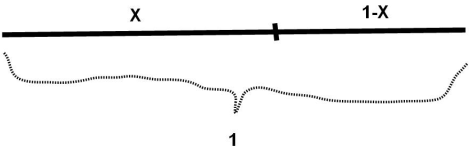
$1;\ 0,5000;\ \approx 0,6666;\ 0,6000;\ 0,6250;\ 0,6153;\ 0,6190;$
$0,6176;\ 0,6181;\ 0,6179;\ 0,6180;\ 0,6180;\ 0,6180;\dots$

Twierdzenie. Granicą tego ciągu jest liczba $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Oznaczamy $g = lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Dzieląc równość $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ przez a_n otrzymamy $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ i po przejściu do granic
$\frac{1}{g} = 1 + g$, więc $g^2 + g - 1 = 0$.
Ponieważ $g > 0$, z równania powyższego otrzymamy
$g = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618$.


~0,6180

ZŁOTY PODZIAŁ ODCINKA



$$\frac{1}{X} = \frac{X}{1-X}$$

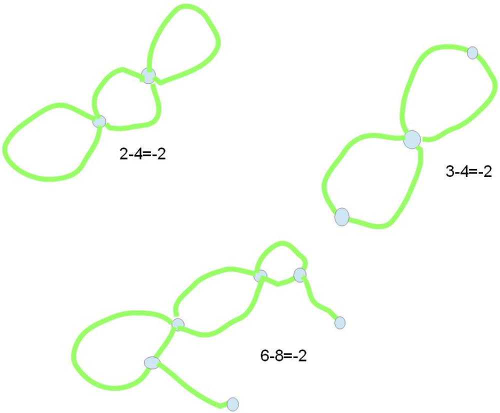
$$X^2 = 1 - X$$

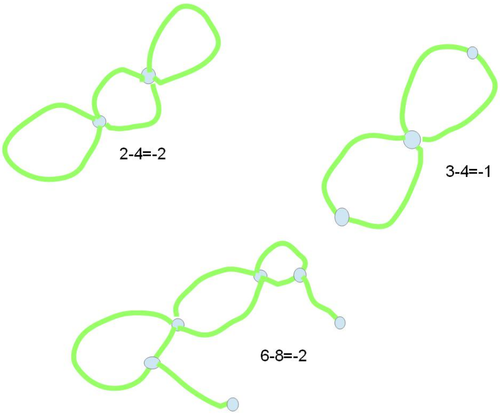
$$X = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI UWM

KIERUNEK:

MATEMATYKA W UBEZPIECZENIACH I FINANSACH


2-4=-2
3-4=-2
6-8=-2

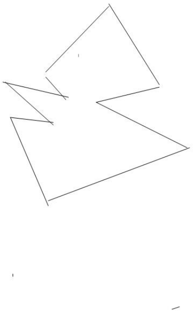

2-4=-2
3-4=-1
6-8=-2

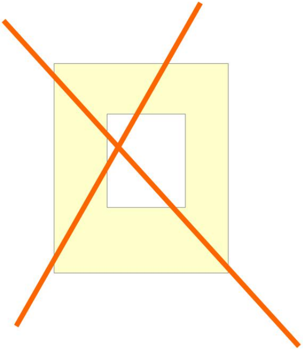
Definicja

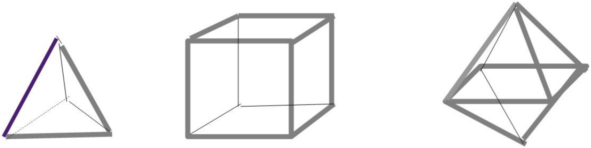
Powierzchnią wielościenną w $\mathbb{R}^3$ nazywa się podzbiór $\mathbb{R}^3$, który jest sumą skończonej liczby trójkątów i spełnia następujące warunki:

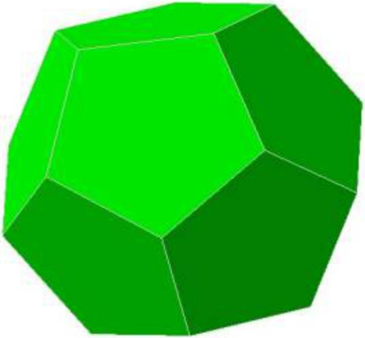
1. *część wspólna dowolnych dwóch różnych trójkątów jest albo pusta, albo wspólnym wierzchołkiem albo wspólną krawędzią;*
2. *każda krawędź należy do dokładnie dwóch trójkątów;*
3. *jeśli dwie krawędzie mają wspólny wierzchołek, to od jednej do drugiej można przejść ciągiem trójkątów takim, że dwa kolejne mają wspólną krawędź.*

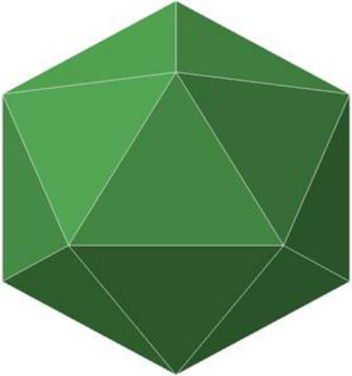
Dla naszych celów możemy zamiast trójkątów dopuścić wielokąty, bo i tak każdy wielokąt można podzielić na trójkąty!
ALE! ALE! CO TO JEST WIELOKĄT?
Jest to podzbiór (ograniczony) płaszczyzny ograniczony łamaną zwyczajną (bez samoprzecięć) zamkniętą.











Definicja

Charakterystyką Eulera powierzchni wielościennej Σ nazywa się liczbę

$$e(\Sigma) = W - K + Ś,$$

gdzie W = liczba wierzchołków, K = liczba krawędzi, $Ś$ = liczba ścian dwuwymiarowych (wielokątów) dowolnie wybranej triangulacji powierzchni Σ.

Fakt. Definicja ta jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru triangulacji (dopuszczone są też ściany wielokątne).

Powierzchnie platońskie

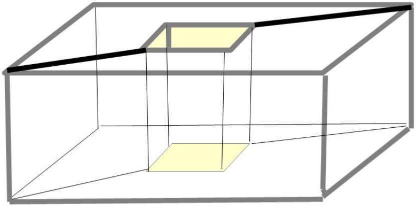
Ś	W	K	e=W-K+Ś
4	4	6	2
6	8	12	2
8	6	12	2
12	20	30	2
20	12	30	2

Powierzchnię nazywa się wypukłą, jeśli dla każdej ściany leży po jednej stronie płaszczyzny wyznaczonej przez ścianę.

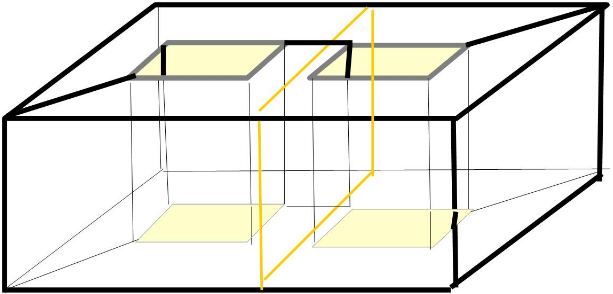
Fakt. Charakterystyka Eulera dowolnej powierzchni wypukłej jest równa 2.

Dowód 'latarkowy' czyli $1 + 1 = 2$. Charakterystyka Eulera wielokąta jest równa 1. Powierzchnię wypukłą można zrzutować na dowolnie wybraną ścianę tak, że pozostałe ściany dają podział wybranej ściany na wielokąty. Żeby to zobaczyć wystarczy umieścić źródło światła w punkcie zewnętrznym względem powierzchni ale dostatecznie blisko pewnego punktu wewnętrznego wybranej ściany. Światło padnie na wszystkie wierzchołki! Wynika z tego, że charakterystyka takiej powierzchni jest dwukrotnie większa od charakterystyki wielokąta, a więc wynosi $1 + 1 = 2$.

Powierzchnie inne niż wypukłe: torus ('precel' rodzaju 1)



Torus ('precel') rodzaju 2



Oznaczmy przez T_k torus rodzaju k.

Fakt.

1. $e(T_1) = 0$.
2. $e(T_k) = 2 - 2k$.

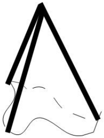
1 wylicza się bezpośrednio. Wychodząc z tego, indukcyjnie sprawdza się, że

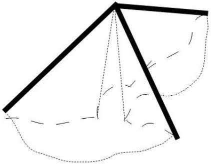
$$e(T_k) = e(T_{k-1}) + e(T_1) - 2 = e(T_{k-1}) - 2.$$

Zakrzywienie w wierzchołku

dodatnie

ujemne





suma kątów $< 360^0$

suma kątów $> 360^0$

Definicja

Defektem wierzchołka nazywa się liczbę $2\pi -$ *suma miar (w radianach) kątów w tym wierzchołku.*

Twierdzenie

Wzór Gaussa - Bonneta. Suma defektów w wierzchołkach powierzchni Σ *jest równa* $2\pi e(\Sigma)$.

Dowód. Możemy założyć, że ściany są trójkątne. Wtedy suma wszystkich kątów równa jest Śπ. Mamy też równość 3Ś = 2K, więc Ś - K = -$\frac{1}{2}$ Ś. Suma defektów równa jest
2Wπ - Śπ = 2π(W - $\frac{1}{2}$ Ś) = 2π e(Σ).

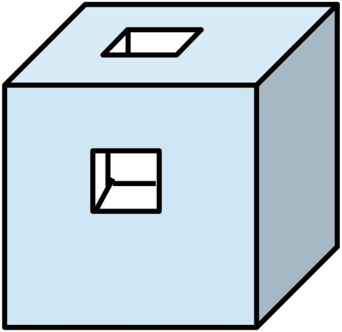
Przykłady.

Suma defektów torusa rodzaju 1 = $8(\frac{\pi}{2})$ - $8(\frac{\pi}{2})$ = 0.

Suma defektów torusa rodzaju 2 = $8(\frac{\pi}{2})$ - $16(\frac{\pi}{2})$ = -4π.

Wniosek. Jeśli $e(\Sigma)<0$, to przynajmniej w jednym wierzchołku jest ujemne zakrzywienie (czyli ujemny defekt).

ZADANIE: Jakie są: suma defektów oraz charakterystyka Eulera powierzchni



ZADANIE: W przestrzeni (trójwymiarowej) mamy N punktów i każdy z tych punktów jest połączony odcinkiem z każdym innym tak, że odcinki te nie przecinają się (poza ich końcami). Każdy z odcinków jest pomalowany na czarno lub na czerwono. Dla jakich N można wybrać kolory tak, by żaden trójkąt utworzony przez odcinki NIE BYŁ pomalowany jednym kolorem?

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

i zachęcam do studiowania

MATEMATYKI I INFORMATYKI...

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

i zachęcam do studiowania

MATEMATYKI I INFORMATYKI... OCZYWIŚCIE NA UWM!!