

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Do czego mogą się przydać reszty z dzielenia?

Joanna Kluczenko¹

Spotkania z matematyką

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Outline

- 1 Co to są kongruencje?
- 2 Której karty brakuje?
- 3 Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?
- 4 Która godzina będzie za 67 godzin?
- 5 Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?
- 6 Literatura.
- 7 Zadania na kongruencję

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

TWIERDZENIE (O dzieleniu z resztą)

Dla dowolnej liczby całkowitej a i dowolnej liczby naturalnej $m > 1$ istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych k i r taka, że:

① $a = k \cdot m + r,$

② $0 \leq r < m.$

Liczbę r z powyższego twierdzenia nazywamy resztą z dzielenia liczby a przez m .

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Przykłady:

1 $10 = 2 \cdot 4 + 2$

2 $18 = 4 \cdot 4 + 2$

3 $27 = 3 \cdot 8 + 3$

4 $63 = 7 \cdot 9$

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Definicja. Niech m będzie liczbą naturalną większą od 1. Mówimy, że liczba całkowita a przystaje do liczby całkowitej b modulo m , jeżeli liczby a i b dają równe reszty z dzielenia przez m . Piszemy wtedy

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Relację przystawania nazywamy też **kongruencją**.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Zauważmy, że jeżeli $a \equiv b \pmod{m}$, to istnieją liczby k, h i r takie, że $a = k \cdot m + r$ oraz $b = h \cdot m + r$.

Zatem

$$a - b = m(k - h).$$

Wniosek.

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \pmod{m}.$$

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Przykład:

$$① \quad 10 = 2 \cdot 4 + 2$$

$$② \quad 18 = 4 \cdot 4 + 2$$

Zatem

$$10 \equiv 18 \pmod{m}.$$

Inaczej $10 - 18 = -8$ jest podzielne przez 2.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Której karty brakuje?

Nasze zadanie jest następujące:

Z talii usuwamy jedną kartę, nie oglądając jej. Pozostałe karty tasujemy i pokazujemy po jednej. Zadaniem będzie odgadnięcie, jakiej karty brakuje.

Uwaga. Dla uproszczenia będziemy rozważać dwa kolory: kiery i trefle.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Jak to policzyć?

Przyporządkowujemy kartom liczby:

As = 1

10-ka = 10

2-ka = 2 ...

walet = 11

3-ka = 3

dama = 12

4-ka = 4

król = 13

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Dodajmy do siebie liczby odpowiadające kompletnej talii:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13.$$

Zauważmy, że możemy je połączyć w pary sumujące się do 13:

$$1 + 12, 2 + 11, 3 + 10, 4 + 9, 5 + 8, 6 + 7, 13.$$

Zatem suma wszystkich liczb jest podzielna przez 13. Co więcej, jeżeli jakiejś karty zabraknie, to jej para będzie resztą z dzielenia sumy pozostałych kart przez 13.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Uwaga. Interesuje nas tylko reszta z dzielenia przez 13, nie cała suma. Dlatego za każdym razem obliczamy resztę i dopiero do niej dodajemy kolejną liczbę.

Przykład...

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Jak można sobie ułatwić liczenie?

- Liczby 13 nie musimy w ogóle liczyć, bo nic ona nie zmienia.
- Zamiast dodawać 12 możemy odjąć 1.
- Zamiast dodawać 11 możemy odjąć 2.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

A jak obliczyć, jaki kolor ma brakująca karta?

To będziemy liczyć osobno.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

W przypadku dwóch kolorów, jak w moim przykładzie, można przypisać kierom 0, treflom 1.

Jaka powinna być wtedy suma dla kompletnej talii?

A jaka, gdy brakuje jednego kiera? Jaka, gdy brakuje jednego trefla?

Widać, że tak naprawdę istotne jest tylko to, czy wynik jest parzysty, czy nieparzysty – czyli jaką daje resztę z dzielenia przez 2.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Jeżeli mamy pełną talię, możemy na przykład liczyć, że kier to 0, trefl to 1, karo to 2, pik to 3.

Można robić tak:

Gdy dana karta to kier, zmień położenie lewej ręki,

Gdy kartą jest karo, zmień położenie prawej ręki,

Gdy kartą jest pik, zmień położenie obu rąk,

Gdy kartą jest trefl, nic nie zmieniaj.

Przez „zmianę położenia rąk” rozumiem coś, co ma tylko dwie możliwości (np. ręka do góry, ręka w dół).

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Prezentacja przykładu z użyciem kart...

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Następne nasze zadanie polega na obliczaniu dnia tygodnia, gdy znamy konkretną datę.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Poniedziałek to pierwszy dzień tygodnia, wtorek – drugi, itd.

Zatem licząc dzień tygodnia, możemy przyjąć, że:

- poniedziałki dają resztę 1 z dzielenia przez 7,
- wtorki dają resztę 2 z dzielenia przez 7
- ...
- niedziele dają resztę 0 z dzielenia przez 7.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Przykład. Jakim dniem tygodnia będzie w tym roku 1 września?

Do 1 maja „brakuje” nam 16 dni.

Czyli: czwartek daje resztę 4 z dzielenia przez 7, dodając 16 otrzymujemy liczbę 20, która daje resztę 6 z dzielenia przez 7.

Teraz liczymy dni maja. Maj ma 31 dni. Zamiast dodawać te dni, zauważmy, że 31 daje resztę 3 z dzielenia przez 7, więc wystarczy dodać 3.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Następnie liczymy dni czerwca. Jest ich 30. 30 daje resztę 2 z dzielenia przez 3, czyli wystarczy dodać 2.

Lipiec i sierpień mają po 31 dni, więc dodajemy jeszcze 2 razy po 3 dni. Interesuje nas 1 dzień września, więc musimy dodać jeszcze 1.

Razem mamy: $6 + 3 + 2 + 3 + 3 + 1 = 18$.

Liczba 18 daje resztę 4 z dzielenia przez 7. 1 wrzesień będzie więc czwartym dniem tygodnia – czyli czwartkiem.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

W podobny sposób można policzyć, w jaki dzień tygodnia przypadła dowolna data – w przyszłości i przeszłości.

„Powiedz mi jakiego dnia się urodziłeś, a ja powiem, jaki to dzień tygodnia”.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Która godzina będzie za 67 godzin?

Zadanie. Jest godzina 18:00. Która godzina będzie za 67 godzin?

$$18 + 67 \equiv 18 + 19 \pmod{24} = 37 \equiv 13 \pmod{24}$$

Zatem za 67 godzin będzie godzina 13:00.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Kod towarów w sklepie jest zazwyczaj 13-cyfrowy:

dwie lub trzy pierwsze cyfry to zazwyczaj kod kraju, w którym został zarejestrowany dany produkt (w przypadku Polski jest to 590)

następne 4,5 lub 6 cyfr to kod przyznany producentowi

następne 5,4 lub 3 cyfry to kod nadany przez producenta

ostatnia 13 cyfra jest cyfrą kontrolną.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Jak tworzona jest cyfra kontrolna?

Dodajemy wszystkie cyfry stojące na miejscach nieparzystych oraz trzykrotności cyfr stojących na miejscach parzystych. Suma ta przystaje do -cyfry kontrolnej modulo 7!

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Przykład:

5 0 0 1 6 8 8 0 5 7 4 7 7

$$5 + 0 + 5 + 8 + 5 + 4 + 3 \cdot (9 + 1 + 8 + 0 + 7 + 7) = 123$$

$$123 \equiv -7 \pmod{10} \Leftrightarrow 123 + 7 \equiv 0 \pmod{10}.$$

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Literatura

- 1 [1] A. Gołębiewska, M. Wysokińska, O resztach z dzielenia trochę inaczej, Miniatury matematyczne, wydawnictwo AKSJOMAT-Toruń, nr 46, 2014
- 2 [2.] M. Bryński, Jaki dzień tygodnia, Delta, nr 3 (430) 2010
- 3 [3.] A. Dąbrowski, Kody na co dzień, Delta, nr 9 (364) 2004

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

ZADANIA NA KONGRUENCJĘ

Zanim przejdziemy do rozwiązywania zadań, podamy kilka własności kongruencji.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Własności kongruencji

$$(1) a \equiv a \pmod{m} \quad (2) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$$

$$(3) a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$$

$$(4) a \equiv a_1 \pmod{m} \wedge b \equiv b_1 \pmod{m} \Rightarrow a+b \equiv a_1+b_1 \pmod{m}$$

$$(5) a \equiv a_1 \pmod{m} \wedge b \equiv b_1 \pmod{m} \Rightarrow a \cdot b \equiv a_1 \cdot b_1 \pmod{m}$$

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Własności kongruencji

WNIOSEK

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

UWAGA Nie można dzielić obu stron kongruencji przez wspólny dzielnik!

PRZYKŁAD 1 $48 \equiv 18 \pmod{10}$ oraz $12 \equiv 2 \pmod{10}$, ale $4 \not\equiv 9 \pmod{10}$

PRZYKŁAD 2 $16 \equiv 6 \pmod{10}$, ale $8 \not\equiv 3 \pmod{10}$

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Zadanie 1. Znaleźć trzy ostatnie cyfry liczby 1999^{1999} .

Rozwiązanie:

$$1999 \equiv 999 \equiv -1 \pmod{1000}$$

$$1999^{1999} \equiv (-1)^{1999} \pmod{1000}$$

$$(-1)^{1999} = -1 \equiv 999 \pmod{1000}$$

Zatem trzy ostatnie cyfry liczby 1999^{1999} to 999.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Zadanie 2. Znaleźć ostatnią cyfrę liczby 2^{1000} .

Rozwiązanie:

$$2^4 \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 2^{1000} \equiv 6^{250} \pmod{10}$$

Korzystając z zasady indukcji matematycznej pokażemy, że

$$6^k \equiv 6 \pmod{10}, \quad k > 1$$

Dla $k = 2$: $6^2 \equiv 6 \pmod{10}$. Zakładamy, że $6^k \equiv 6 \pmod{10}$.

Pokażemy, że $6^{k+1} \equiv 6 \pmod{10}$:

$$6^{k+1} = 6^k \cdot 6 \equiv 6 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}.$$

Ostatecznie $2^{1000} \equiv 6 \pmod{10}$.

Zatem ostatnia cyfra liczby 2^{1000} to 6.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Zadanie 3. Obliczyć resztę z dzielenia 2^{100} przez 3.

Rozwiązanie:

$$2^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{100} \equiv 1 \pmod{3}.$$

Zatem cyra 1 jest resztą z dzielenia liczby 2^{100} przez 3.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Zadanie 4. Znaleźć najmniejszy dzielnik pierwszy liczby $2^{82} + 1$.

Rozwiązanie:

Cyfra 2 na pewno nie jest szukanym dzielnikiem, ponieważ cyfra $2^{82} + 1$ jest nieparzysta.

Sprawdzamy cyfrę 3:

$$2^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{82} \equiv 1^{41} = 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{82} + 1 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Zatem cyfra 3 nie jest szukanym dzielnikiem. Sprawdzamy cyfrę 5:

$$2^2 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 2^{82} \equiv (-1)^{41} = -1 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 2^{82} + 1 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Zatem szukanym dzielnikiem pierwszym liczby $2^{82} + 1$ jest cyfra 5.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Zadanie 5. Udowodnić, że $10 \mid 43^{43} - 17^{17}$.

Rozwiązanie:

Mamy udowodnić, że $43^{43} - 17^{17} \equiv 0 \pmod{10}$.

Rozważamy przystawanie mod 10. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} 43^{43} &\equiv 3^{43} \quad (\text{gdyż } 43 \equiv 3) = 3 \cdot 3^{42} = 3 \cdot (3^2)^{21} \\ &= 3 \cdot (3^2)^{21} \equiv 3 \cdot (-1)^{21} \quad (\text{gdyż } 3^2 \equiv -1) = -3. \end{aligned}$$

Zatem: $43^{43} \equiv -3 \pmod{10}$.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Z drugiej strony:

$$\begin{aligned} -17^{17} &\equiv -7^{17} \text{ (gdyż } -17 \equiv -7) \equiv -(-3)^{17} \text{ (gdyż } 7 \equiv -3) = \\ &= 3^{17} = 3 \cdot 3^{16} = 3 \cdot (3^2)^8 \equiv 3 \cdot (-1)^8 = 3. \end{aligned}$$

Zatem: $-17^{17} \equiv 3 \pmod{10}$.

Ostatecznie: $43^{43} - 17^{17} \equiv -3 + 3 = 0 \pmod{10}$.

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

Zadanie 6. Wykaż, że dla żadnej wartości naturalnej n liczba $2^n + 1$ nie jest podzielna przez 7.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$. Wynika stąd, że:

- $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$
- $2^{3k+1} \equiv 2 \pmod{7}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$
- $2^{3k+2} \equiv 4 \pmod{7}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$

Co to są kongruencje?

Której karty brakuje?

Jak sprawdzić w którym dniu tygodnia wypadną moje urodziny?

Która godzina będzie za 67 godzin?

Jak tworzona jest liczba kontrolna w kodach towarów w sklepie?

Literatura.

Zadania na kongruencję

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ