

I Seria zadań z Matematyki, WNoŚ, marzec 2020

1. Oblicz część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej

- (a) i. $(5 + 3i)(4 - 2i)$;
ii. $(-3 + 3i)(2 - 2i)$;
iii. $(-7 + 2i)(2 + 2i)$.
- (b) i. $\frac{2-3i}{5+i}$;
ii. $\frac{1-3i}{3+i}$;
iii. $\frac{-1-3i}{2+i}$.
- (c) i. $(-1 - i)^{13}$;
ii. $(1 - i)^{12}$;
iii. $(-1 + i)^{11}$.
- (d) i. $(1 + \sqrt{3}i)^{31}$;
ii. $(1 - \sqrt{3}i)^{21}$;
iii. $(-1 - \sqrt{3}i)^{11}$.

2. Oblicz wszystkie zespolone pierwiastki 3-go i 4-go stopnia z liczby -1.

3. Oblicz wszystkie pierwiastki zespolone równania

- (a) i. $x^2 - 4x + 13 = 0$;
ii. $x^2 + 6x + 25 = 0$;
iii. $x^2 - 10x + 29 = 0$.
- (b) i. $x^2 - (2 + 3i)x + 6i = 0$;
ii. $x^2 + ix + 12 = 0$;
iii. $x^2 + 3ix + 18 = 0$.

4. Dane są macierze

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad A &:= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{(b)} \quad A &:= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \\ \text{(c)} \quad A &:= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Oblicz $A \cdot B$.

5. Oblicz $\det(A)$ dla

$$(a) \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(b) \quad A := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(c) \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Oblicz A^{-1} dla

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań liniowych

$$(a) \quad \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ -x + 2y - z = 0; \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ -x + 3y - z = 0; \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

8. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań liniowych

$$(a) \quad \begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ 3x + y - z = 0; \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \\ -x + 2y - z = 0; \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ 3x - 2y - z = 0. \end{cases}$$

9. Wyznacz, dla których wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ dany układ jest cramerowski i dla tych wartości rozwiąż go metodą Cramera.

$$(a) \quad \begin{cases} x + 3y + \lambda z = 1 \\ -x + y - z = 2 \\ 3x - 2y - z = 1; \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \lambda x - 3y + z = 1 \\ -x + y - z = 0 \\ 3x - y - z = 1; \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} x + \lambda y + z = 1 \\ -x + y - z = -1 \\ x - 2y - z = 1. \end{cases}$$