

III Seria zadań z Matematyki, WNoŚ, maj 2020

1. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu z funkcji

(a) $u = x^4 + y^4 - 4\frac{x^2}{y^2}$;

(b) $u = xy - \frac{x}{y}$;

(c) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu po zmiennych x, y z funkcji

(a) $u = f(t)$, gdzie $t = xy$;

(b) $u = f(\xi, \eta)$, gdzie $\xi = x + y, \eta = x - y$;

(c) $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, gdzie $\xi = x^2 + y^2, \eta = x^2 - y^2, \zeta = 2xy$.

(Zakładamy, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalną funkcją od 1, 2, lub 3 zmiennych.)

3. Oblicz punkty krytyczne funkcji i zbadaj ich typ (punkt maksimum, minimum, punkt nie będący punktem ekstremum).

(a) $z = x^2 - (y - 1)^2$;

(b) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$;

(c) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

(d) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$;

(e) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;

(f) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$;

(g) $z = -3xy^2 + x^3 + (9/4)x + 3y$;

(h) $z = -6xy^2 + x^3 + (93/16)x + 3y$;

(i) $z = -(3/2)xy^2 + x^3 + (21/4)x + 3y$;

4. Obliczyć ekstrema funkcji f na powierzchni S i wskazać ich typ.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2, S = \{(x, y) \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\}$;

(b) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z, S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

5. Oblicz całki

(a) $\int_{[0,1] \times [3,4]} xy \, dx \, dy$;

(b) $\int_A (x + y^2) \, dx \, dy$, gdzie A jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0), (0, 3), (3, 0)$;

(c) $\int_A (x^2 + 2y) \, dx \, dy$, gdzie A jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0), (2, 3), (3, 1)$;

(d) $\int_A (x + y^3) \, dx \, dy$, gdzie A jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0), (1, 3), (3, 2)$;

(e) $\int_A (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, gdzie A jest kołem o środku w zerze i promieniu 1;

(f) $\int_{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]} (x + yz) \, dx \, dy \, dz$;

(g) $\int_B (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, gdzie B jest ostrosłupem o wierzchołkach $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)$.

6. Oblicz objętość ciał ograniczonych przez powierzchnie

(a) $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0;$

(b) $x + y + z = a, x^2 + y^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0, (a \geq R\sqrt{2}).$

7. Rozwiąż równanie różniczkowe

(a) $y' + 2(x + x^2)y = 0;$

(b) $y' + y \tan x = 0.$