

II seria zadań z Matematyki na WNT, Mechatronika, studia stacjonarne II, maj 2019

1. Oblicz całki

- (a) $\int_{[0,1] \times [3,4]} xy \, dx \, dy$;
- (b) $\int_A (x + y^2) \, dx \, dy$, gdzie A jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$;
- (c) $\int_A (x^2 + 2y) \, dx \, dy$, gdzie A jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$;
- (d) $\int_A (x + y^3) \, dx \, dy$, gdzie A jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(3, 2)$;
- (e) $\int_A (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, gdzie A jest kołem o środku w zerze i promieniu 1;
- (f) $\int_{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]} (x + yz) \, dx \, dy \, dz$;
- (g) $\int_B (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, gdzie B jest ostrosłupem o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 2)$.

2. Oblicz objętość ciał ograniczonych przez powierzchnie

- (a) $z = 1 + x + y$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$;
- (b) $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ($a \geq R\sqrt{2}$).

3. Sprawdź warunki potencjalności pola wektorowego V , jeśli są spełnione oblicz potencjał U , $V = \text{grad}U$. Oblicz pracę pola wzdłuż krzywej γ .

- (a) $V(x, y, z) = (y, x, 2z)$, $\gamma(t) = (1, t, t^2)$, $t \in [1, 2]$.
- (b) $V(x, y, z) = (e^{xy+yz}y, e^{xy+yz}(x+z), e^{xy+yz}y)$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Rozwiąż równanie różniczkowe

- (a) $xy' + y = y^2$;
- (b) $y' - xy^2 = 2xy$;
- (c) $y^2 + x^2y' = xyy'$;
- (d) $y' + y \tan x = \sec x$;
- (e) $y'' + y' - 2y = 0$;
- (f) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;
- (g) $y'' + y' - 6y = e^{5x}$;
- (h) $y'' - 5y' + 6y = e^x$;
- (i) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

5. Rozwiąż układ równań różniczkowych

- (a) $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases}$;
- (b) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$.