

Własność wypukłości dla odwzorowania momentu i geometria przestrzeni ilorazowych

Wykład habilitacyjny

Andriy Panasyuk

Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Uniwersytet Warszawski
oraz

Instytut Matematyczny PAN

Wstęp: Twierdzenie Horna

Niech $\mathcal{H}^n := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid A = \bar{A}^T\}$ (zbiór macierzy *hermitowskich*).

Twierdzenie spektralne $\implies$ każda $A \in \mathcal{H}^n$ diagonalizowalna za pomocą transformacji *unitarnych*.

Określmy odwzorowanie

$$\phi^n : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, A \mapsto (a_{11}, \dots, a_{nn})$$

(zbiór wyrazów diagonalnych) i dla $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ oznaczmy

$$\mathcal{H}_\lambda^n := \{A \in \mathcal{H}^n \mid \exists U \in U(n) : UAU^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\}$$

Twierdzenie Horna (1954)

Obraz odwzorowania $\phi^n|_{\mathcal{H}_\lambda^n}$ jest powłoką wypukłą wektorów

$$(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}), \sigma \in S_n.$$

Wstęp: Twierdzenie Horna

Niech $\mathcal{H}^n := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid A = \bar{A}^T\}$ (zbiór macierzy *hermitowskich*).

Twierdzenie spektralne $\implies$ każda $A \in \mathcal{H}^n$ diagonalizowalna za pomocą transformacji *unitarnych*.

Określmy odwzorowanie

$$\phi^n : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, A \mapsto (a_{11}, \dots, a_{nn})$$

(zbiór wyrazów diagonalnych) i dla $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ oznaczmy

$$\mathcal{H}_\lambda^n := \{A \in \mathcal{H}^n \mid \exists U \in U(n) : UAU^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\}$$

Twierdzenie Horna (1954)

Obraz odwzorowania $\phi^n|_{\mathcal{H}_\lambda^n}$ jest powłoką wypukłą wektorów

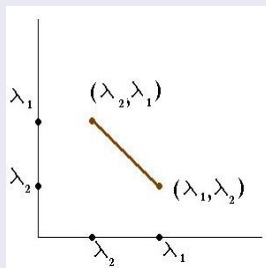
$$(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}), \sigma \in S_n.$$

Wstęp: Twierdzenie Horna

Ilustracja: $n = 2$

$$SU(2) \ni U = \begin{bmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

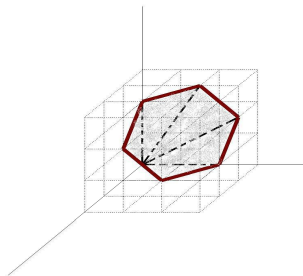
$$U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} U^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 |a|^2 + \lambda_2 |b|^2 & * \\ * & \lambda_1 |b|^2 + \lambda_2 |a|^2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 t + \lambda_2 (1-t) & * \\ * & \lambda_1 (1-t) + \lambda_2 t \end{bmatrix}, t \in [0, 1]$$



Wstęp: Twierdzenie Horna

Ilustracja: $n = 3$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3, 2, 1)$$



Wstęp: Twierdzenie Kostanta

Ingredenty:

Przypadek ogólny	Przykład
G zwarta grupą Liego	$G = U(n)$
$\mathfrak{g}$ jej algebrą Liego	$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n) \cong \mathcal{H}^n$ (zob. Uwagę)
$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ działanie <i>dołączone</i>	$U \mapsto (A \mapsto UAU^{-1})$
$\text{Ad}^* : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}^*)$ dział. <i>kodołączone</i>	$\text{Ad}^* \cong \text{Ad}$ (za pomocą $\text{Tr}(AB)$)
$T \subset G$ torus maksymalny	$\{\text{diag}(e^{it_1}, \dots, e^{it_n}) \mid t_i \in \mathbb{R}\}$
$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ jego algebra Liego	$\mathbb{R}^n$
$\pi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{t}^*$ rzut dualny do $\iota : \mathfrak{t} \hookrightarrow \mathfrak{g}$	ϕ^n
$O \subset \mathfrak{g}^*$ orbita działania kodołączonego	$\mathcal{H}_\lambda^n$
O^T zbiór punktów stałych	$\text{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}), \sigma \in S_n$

Uwaga: $A \mapsto iA$ utożsamia $\mathcal{H}^n$ ze zbiorem

$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid A = -\bar{A}^T\}$ macierzy *antyhermitowskich*

Twierdzenie Kostanta (1973)

Obraz odwzorowania $\pi|_O : O \rightarrow \mathfrak{t}^$ jest powłoką wypukłą zbioru $\pi(O^T)$.*

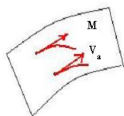
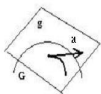
Działania hamiltonowskie i odwzorowanie momentu

Niech G grupa Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$, M rozmaiłość gładka.

Działanie grupy i infinitezymalne działanie algebry

$$\mu : M \times G \rightarrow M$$

$$\tilde{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(M) \text{ (homomorfizm algebr Liego)}$$



$\tilde{\mu}(a) =: V_a$ fundamentalne pole wektorowe działania, $a \in \mathfrak{g}$

Działanie symplektyczne na rozmaiłości symplektycznej (M, ω)

$$\mu_g := \mu(\cdot, g) : M \rightarrow M, \mu_g^* \omega = \omega, g \in G \quad \parallel \quad \mathcal{L}_{V_a} \omega = 0, a \in \mathfrak{g}$$

$$0 = \mathcal{L}_{V_a} \omega = i_{V_a} d\omega + di_{V_a} \omega = di_{V_a} \omega \implies$$

$$\text{lokalnie } i_{V_a} \omega = df_a, \text{ gdzie } f_a \text{ pewna funkcja} \iff$$

$$\iff V_a = \eta(df_a), \eta = \omega^{-1} \iff V_a \text{ pole lokalnie hamiltonowskie}$$

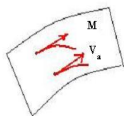
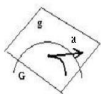
Działania hamiltonowskie i odwzorowanie momentu

Niech G grupa Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$, M rozmaiłość gładka.

Działanie grupy i infinitezymalne działanie algebry

$$\mu : M \times G \rightarrow M$$

$$\tilde{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(M) \text{ (homomorfizm algebr Liego)}$$



$\tilde{\mu}(a) =: V_a$ fundamentalne pole wektorowe działania, $a \in \mathfrak{g}$

Działanie symplektyczne na rozmaiłości symplektycznej (M, ω)

$$\mu_g := \mu(\cdot, g) : M \rightarrow M, \mu_g^* \omega = \omega, g \in G \quad \parallel \quad \mathcal{L}_{V_a} \omega = 0, a \in \mathfrak{g}$$

$$0 = \mathcal{L}_{V_a} \omega = i_{V_a} d\omega + di_{V_a} \omega = di_{V_a} \omega \implies$$

$$\text{lokalnie } i_{V_a} \omega = df_a, \text{ gdzie } f_a \text{ pewna funkcja} \iff$$

$$\iff V_a = \eta(df_a), \eta = \omega^{-1} \iff V_a \text{ pole lokalnie hamiltonowskie}$$

Działania hamiltonowskie i odwzorowanie momentu

Działanie słabo hamiltonowskie

Jest to działanie $\mu : X \times G \rightarrow X$ takie, że każde pole fundamentalne jest (globalnie) hamiltonowskim. Innymi słowy istnieje (liniowe) odwzorowanie $\mathcal{J} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(X)$ zamykające diagram

$$\begin{array}{ccc} & C^\infty(M) & \\ \mathcal{J} \nearrow & \downarrow \eta(\cdot) & \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \Gamma(M) \end{array}$$

Odwzorowanie momentu

Jest to odwzorowanie $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ „dualne do $\mathcal{J}$ ”:

$$\langle a, J(x) \rangle = \langle \mathcal{J}(a), x \rangle = \mathcal{J}(a)(x), \quad x \in M, a \in \mathfrak{g}$$

Przykład: $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ hamiltonian, $v = \eta(H)$ pole hamiltonowskie, Φ_v^t jego potok. Wtedy $t \mapsto \Phi_v^t$ dział. słabo hamilt. $\mathbb{R}$ na M , $J \circ \Phi_v^t = H \circ \Phi_v^t = H = J \circ \text{id}_M$ na $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^*$

Działania hamiltonowskie i odwzorowanie momentu

Działanie słabo hamiltonowskie

Jest to działanie $\mu : X \times G \rightarrow X$ takie, że każde pole fundamentalne jest (globalnie) hamiltonowskim. Innymi słowy istnieje (liniowe) odwzorowanie $\mathcal{J} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(X)$ zamykające diagram

$$\begin{array}{ccc} & C^\infty(M) & \\ \mathcal{J} \nearrow & \downarrow \eta(\cdot) & \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \Gamma(M) \end{array}$$

Odwzorowanie momentu

Jest to odwzorowanie $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ „dualne do $\mathcal{J}$ ”:

$$\langle a, J(x) \rangle = \langle \mathcal{J}(a), x \rangle = \mathcal{J}(a)(x), \quad x \in M, a \in \mathfrak{g}$$

Przykład: $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ hamiltonian, $v = \eta(H)$ pole hamiltonowskie, Φ_v^t jego potok. Wtedy $t \mapsto \Phi_v^t$ dział. słabo hamilt. $\mathbb{R}$ na M , $J \equiv H : M \rightarrow \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^*$

Działania hamiltonowskie i odwzorowanie momentu

Działanie słabo hamiltonowskie

Jest to działanie $\mu : X \times G \rightarrow X$ takie, że każde pole fundamentalne jest (globalnie) hamiltonowskim. Innymi słowy istnieje (liniowe) odwzorowanie $\mathcal{J} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(X)$ zamykające diagram

$$\begin{array}{ccc} & C^\infty(M) & \\ \mathcal{J} \nearrow & \downarrow \eta(\cdot) & \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \Gamma(M) \end{array}$$

Odwzorowanie momentu

Jest to odwzorowanie $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ „dualne do $\mathcal{J}$ ”:

$$\langle a, J(x) \rangle = \langle \mathcal{J}(a), x \rangle = \mathcal{J}(a)(x), \quad x \in M, a \in \mathfrak{g}$$

Przykład: $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ hamiltonian, $v = \eta(H)$ pole hamiltonowskie, Φ_v^t jego potok. Wtedy $t \mapsto \Phi_v^t$ dział. słabo hamilt. $\mathbb{R}$ na M , $J = H : M \rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{R}^*$.

Działania hamiltonowskie i odwzorowanie momentu

Działanie hamiltonowskie

Jest to działanie słabo hamiltonowskie takie, że $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ jest

ekwiwariantne	poissonowskie
ze względu na działania $\mu : M \times G \rightarrow M$ oraz $\text{Ad}^* : \mathfrak{g}^* \times G \rightarrow \mathfrak{g}^*$	ze względu na nawias Poissona odpowiadający η na M oraz nawias Liego–Poissona na $\mathfrak{g}^*$

Struktura Liego–Poissona: $\mathfrak{g}$ algebra Liego, $e_1, \dots, e_n$ jej baza, $c_{ij}^k, [e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ stałe strukturalne, $\eta_{\mathfrak{g}} := c_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ biwektor (Liego–)Poissona na $\mathfrak{g}^*$. Odpowiednie liście symplektyczne = orbity działania kodołączonego.

Przykład

$M \subset \mathfrak{g}^*$ orbita kodołączona, $\omega := (\eta_{\mathfrak{g}}|_M)^{-1}$ Odpowiednie działanie G na M jest hamiltonowskie: $\mathcal{J}(a) = \hat{a}$ (tutaj $\hat{a}$ funkcja liniowa na $\mathfrak{g}^*$, $\hat{a}(\psi) = \langle \psi, a \rangle, \psi \in \mathfrak{g}^*$). Odwzorowanie momentu jest włożeniem $\iota : M \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$, jest więc ekwiwariantne.

Działania hamiltonowskie i odwzorowanie momentu

Działanie hamiltonowskie

Jest to działanie słabo hamiltonowskie takie, że $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ jest

ekwiwariantne	poissonowskie
ze względu na działania $\mu : M \times G \rightarrow M$ oraz $\text{Ad}^* : \mathfrak{g}^* \times G \rightarrow \mathfrak{g}^*$	ze względu na nawias Poissona odpowiadający η na M oraz nawias Liego–Poissona na $\mathfrak{g}^*$

Struktura Liego–Poissona: $\mathfrak{g}$ algebra Liego, $e_1, \dots, e_n$ jej baza, $c_{ij}^k, [e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ stałe strukturalne, $\eta_{\mathfrak{g}} := c_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ biwektor (Liego–)Poissona na $\mathfrak{g}^*$. Odpowiednie liście symplektyczne = orbity działania kodołączonego.

Przykład

$M \subset \mathfrak{g}^*$ orbita kodołączona, $\omega := (\eta_{\mathfrak{g}}|_M)^{-1}$ Odpowiednie działanie G na M jest hamiltonowskie: $\mathcal{J}(a) = \hat{a}$ (tutaj $\hat{a}$ funkcja liniowa na $\mathfrak{g}^*$, $\hat{a}(\psi) = \langle \psi, a \rangle, \psi \in \mathfrak{g}^*$). Odwzorowanie momentu jest włożeniem $\iota : M \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$, jest więc ekwiwariantne.

Twierdzenie Kostanta i odwzorowanie momentu

Lemat

Niech $\mu : M \times G \rightarrow M$ będzie działaniem hamiltonowskim z odwzorowaniem momentu $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ i niech $H \subset G$ będzie podgrupą Liego. Wtedy odwzorowanie momentu działania $\mu|_{M \times H} : M \times H \rightarrow M$ jest równe

$$J_H = \pi_{\mathfrak{h}} \circ J,$$

gdzie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jest algebrą Liego podgrupy H , a $\pi_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$ rzutem dualnym do włożenia $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$.

Twierdzenie Kostanta mówi, że obraz odwzorowania momentów $J_T = \pi_{\mathfrak{t}}|_O : O \rightarrow \mathfrak{t}^*$ działania hamiltonowskiego T na O jest powłoką wypukłą zbioru $\pi_{\mathfrak{t}}(O^T)$.

Twierdzenie Atiyaha

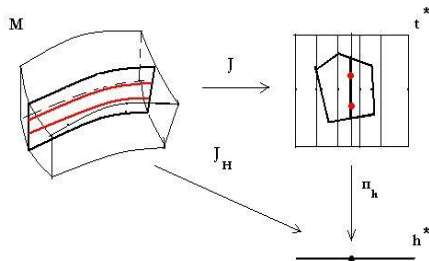
Twierdzenie Atiyaha (1982)

(M, ω) zwarta rozmaitość symplektyczna, $T = \mathbb{T}^n$, $M \times T \rightarrow M$ działanie hamiltonowskie, $J: M \rightarrow \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^n$ odwzorowanie momentu. Wtedy:

- 1 $J(M^T)$ jest zbiorem skończonym;
- 2 $J(M) = \text{conv} J(M^T)$.

Idea dowodu 1. Dla każdego $t \in \mathfrak{t}^*$ zbiór $J^{-1}(t)$ jest spójny.

2. $H \subset T$ podtorus kowymiaru 1, $J_H = \pi_h \circ J$



Twierdzenie Atiyaha

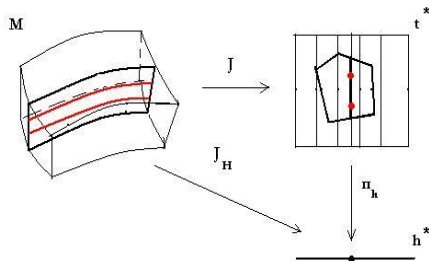
Twierdzenie Atiyaha (1982)

(M, ω) zwarta rozmaitość symplektyczna, $T = \mathbb{T}^n$, $M \times T \rightarrow M$ działanie hamiltonowskie, $J: M \rightarrow \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^n$ odwzorowanie momentu. Wtedy:

- 1 $J(M^T)$ jest zbiorem skończonym;
- 2 $J(M) = \text{conv} J(M^T)$.

Idea dowodu 1. Dla każdego $t \in \mathfrak{t}^*$ zbiór $J^{-1}(t)$ jest spójny.

2. $H \subset T$ podtorus kowymiaru 1, $J_H = \pi_h \circ J$



Wersja twierdzenia dla grup nieabelowych

Ingredenty:

Przypadek ogólny	Przykład
G zwarta grupą Liego	$G = U(2)$
$\mathfrak{g}$ jej algebrą Liego	$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(2) \cong \mathcal{H}^2$
M zwarta rozm. symplektyczna	$i\mathcal{H}_\lambda^3 \subset \mathfrak{u}(3) \cong \mathfrak{u}(3)^*$ orbita kodoł.
$M \times G \rightarrow M$ dział. hamiltonowskie	$\text{Ad}^* : i\mathcal{H}_\lambda^3 \times U(2) \rightarrow i\mathcal{H}_\lambda^3 \rightarrow \text{Uwaga}$
$J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ odwz. momentu	$i\mathcal{H}_\lambda^3 \rightarrow i\mathcal{H}^2$ rzut
$T \subset G$ torus maksymalny	$\{\text{diag}(e^{it_1}, e^{it_2}) \mid t_i \in \mathbb{R}\}$
$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ jego algebra Liego	$\mathbb{R}^2$
$\mathfrak{t}_+^* \subset \mathfrak{t}^*$ komórka Weyla	$\{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 \geq \alpha_2\} \subset \mathbb{R}^2$
$\mathfrak{g}^*/G \cong \mathfrak{t}_+^*$	$i\mathcal{H}_\alpha^2 \mapsto (\alpha_1, \alpha_2)$

Uwaga: $U(2) \subset U(3)$ włożenie standardowe

Twierdzenie Kirwan (1984)

Obraz odwzorowania $M \xrightarrow{J} \mathfrak{g}^ \longrightarrow \mathfrak{g}^*/G \cong \mathfrak{t}_+^*$ jest wielościannem wypukłym.*

Wersja twierdzenia dla grup nieabelowych

Przykład

Macierz hermitowska 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & * \\ a_{21} & a_{22} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

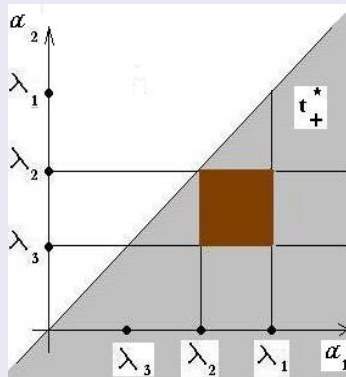
o spektrum $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Jakie jest spektrum macierzy

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} ?$$

Odpowiedź:

$$\text{Sp } A = (\alpha_1, \alpha_2), \lambda_1 \geq \alpha_1 \geq \lambda_2 \geq \alpha_2 \geq \lambda_3$$



Wersja twierdzenia dla grup nieabelowych

Przykład

Macierz hermitowska 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & * \\ a_{21} & a_{22} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

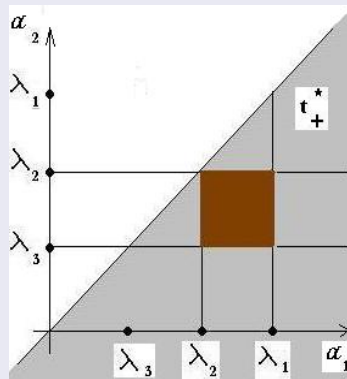
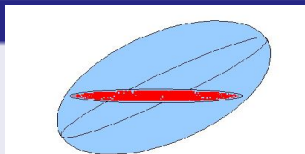
o spektrum $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Jakie jest spektrum macierzy

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} ?$$

Odpowiedź:

$$\text{Sp } A = (\alpha_1, \alpha_2), \lambda_1 \geq \alpha_1 \geq \lambda_2 \geq \alpha_2 \geq \lambda_3$$



Wersja twierdzenia dla grup nieabelowych

Przykład

Macierz hermitowska 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & * \\ a_{21} & a_{22} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

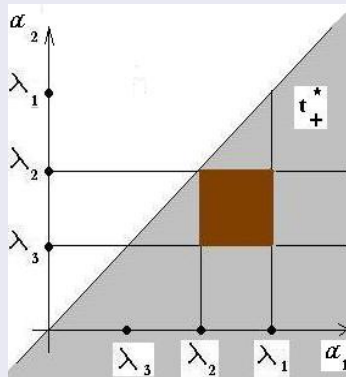
o spektrum $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Jakie jest spektrum macierzy

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} ?$$

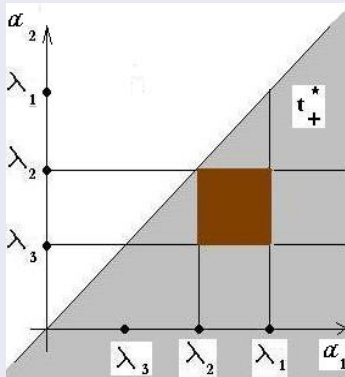
Odpowiedź:

$$\text{Sp } A = (\alpha_1, \alpha_2), \lambda_1 \geq \alpha_1 \geq \lambda_2 \geq \alpha_2 \geq \lambda_3$$

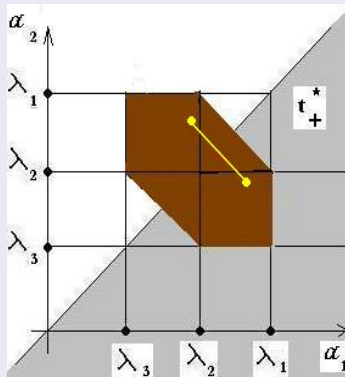


Związek pomiędzy twierdzeniami „abelowym” i nieabelowym

Wielościan Kirwan



Wielościan Atiyaha

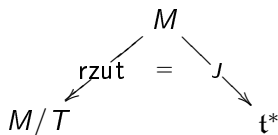


Twierdzenie Delzanta (1988)

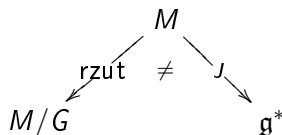
(M, ω) zwarta, $\dim M = 2n$, $\mu : M \times T \rightarrow M$ efektywne działanie hamiltonowskie, $T = \mathbb{T}^n$, wtedy:

- „wieloscian momentu” Δ ma specyficzną własność „W”;
- Δ wyznacza M i μ z dokładnością do dyfeomorfizmu;
- każdy wieloscian o własności „W” jest „wieloscianem momentu” pewnego efektywnego działania hamiltonowskiego T na $2n$ -wymiarowej rozmaitości zwartej.

Uwaga: W tym przypadku
 $\Delta = M/T$:



W ogólnym przypadku włókna J i
„rzutu” są ω -ortogonalne i



Hipoteza Delzanta (otwarta)

(M, ω) zwarta, G zwarta spójna grupa Liego, $\mu : M \times G \rightarrow M$ generycznie lokalnie swobodne (generyczna grupa izotropii dyskretna) działanie hamiltonowskie, spełniające warunek*

$$\dim M = \dim G + \text{rank } G.$$

Wtedy:

- „wielościان momentu” wraz z klasą sprzężoności *generycznej grupy izotropii* wyznaczają M i μ z dokładnością do dyfeomorfizmu.

* Dla torusa T warunek ten jest równoważny $\dim M = 2 \dim T$

 **dziękuję za uwagę!**