

Algebroidy i grupoidy Liego i współczesna teoria Liego

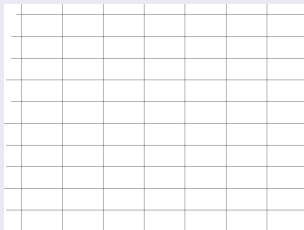
Wykład habilitacyjny

Andriy Panasyuk

Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Uniwersytet Warszawski
oraz
Instytut Matematyczny PAN

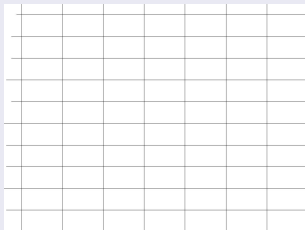
Wstęp: Grupy symetrii obiektów „jednorodnych”

Przykład obiektu jednorodnego: „podłoga z płytek ceramicznych” o wymiarach 2×1



Wstęp: Grupy symetrii obiektów „jednorodnych”

Przykład obiektu jednorodnego: „podłoga z płytek ceramicznych” o wymiarach 2×1



Grupa G symetrii podłogi

- 1 krata $2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
- 2 odbicia względem prostych poziomych i pionowych, przechodzących przez węzły kraty oraz przez środki „płytek”;
- 3 obroty o 180° względem węzłów kraty oraz punktów leżących w środkach płytek oraz ich krawędzi.

Wstęp: Grupy symetrii obiektów „jednorodnych”

Pytanie:

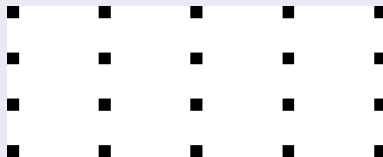
W jakim stopniu można odtworzyć strukturę obiektu z jego grupy symetrii?

Wstęp: Grupy symetrii obiektów „jednorodnych”

Pytanie:

W jakim stopniu można odtworzyć strukturę obiektu z jego grupy symetrii?

Orbita Gx punktu $x \in 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $Gx = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

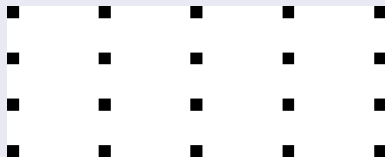


Wstęp: Grupy symetrii obiektów „jednorodnych”

Pytanie:

W jakim stopniu można odtworzyć strukturę obiektu z jego grupy symetrii?

Orbita Gx punktu $x \in 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $Gx = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

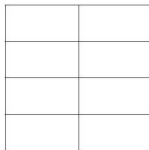


Odpowiedź

- 1 Grupy symetrii „podłogi” i kraty pokrywają się, w szczególności G nie zawiera informacji o „fugach”.
- 2 Jednak G dobrze odzwierciedla „nierównoprawność” poziomego i pionowego kierunków.

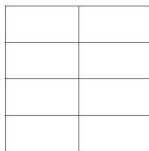
Wstęp: Grupy symetrii obiektów „niejednorodnych”

Przykład obiektu niejednorodnego: „kawałek podłogi”



Wstęp: Grupy symetrii obiektów „niejednorodnych”

Przykład obiektu niejednorodnego: „kawałek podłogi”

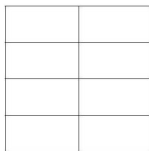


Grupa H symetrii kawałka, grupa „czwórkowa” Kleina

- 1 odbicia względem prostych przechodzących przez środek;
- 2 obrót o 180° stopni względem środka;

Wstęp: Grupy symetrii obiektów „niejednorodnych”

Przykład obiektu niejednorodnego: „kawałek podłogi”



Grupa H symetrii kawałka, grupa „czwórkowa” Kleina

- 1 odbicia względem prostych przechodzących przez środek;
- 2 obrót o 180° stopni względem środka;

Niesie zbyt mało informacji o strukturze obiektu

Grupoidy: pierwszy przykład

Grupoid transformacyjny działania grupy G na $\mathbb{R}^2$

Zbiór

$$\mathcal{G}(G, \mathbb{R}^2) := \{(x, \gamma, y) \mid x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2, \gamma \in G \text{ oraz } x = \gamma y\}$$

z działaniem dwuargumentowym

$$(x, \gamma, y)(y, \nu, z) = (x, \gamma\nu, z).$$

Grupoidy: pierwszy przykład

Grupoid transformacyjny działania grupy G na $\mathbb{R}^2$

Zbiór

$$\mathcal{G}(G, \mathbb{R}^2) := \{(x, \gamma, y) \mid x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2, \gamma \in G \text{ oraz } x = \gamma y\}$$

z działaniem dwuargumentowym

$$(x, \gamma, y)(y, \nu, z) = (x, \gamma\nu, z).$$

Działanie to ma następujące własności:

- ❶ Jest określone tylko na parach elementów g, h , dla których $\beta(g) = \alpha(h)$. Tutaj $\alpha, \beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha : (x, \gamma, y) \mapsto x, \beta : (x, \gamma, y) \mapsto y$.
- ❷ Jest łączne (o ile określone): $(gh)k = g(hk)$.
- ❸ $\forall g \in \mathcal{G} \exists \lambda_g, \rho_g : \lambda_g g = g, g \rho_g = g$ (istnieją prawe i lewe „jedyńki”).
- ❹ $\forall g \in \mathcal{G} \exists g^{-1} : gg^{-1} = \lambda_g, g^{-1}g = \rho_g$ (istnieją prawe i lewe odwrotne).

Grupoidy: ogólny punkt widzenia

Definicja *H.Brandt, 1926*

Grupoidem z bazą B nazywamy zbiór $\mathcal{G}$ wyposażony w odwzorowania $\alpha, \beta : \mathcal{G} \rightarrow B$ oraz w działanie $(g, h) \mapsto gh$ spełniające aksjomaty 1-4.

Grupoidy: ogólny punkt widzenia

Definicja *H.Brandt, 1926*

Grupoidem z bazą B nazywamy zbiór $\mathcal{G}$ wyposażony w odwzorowania $\alpha, \beta : \mathcal{G} \rightarrow B$ oraz w działanie $(g, h) \mapsto gh$ spełniające aksjomaty 1-4.

Interpretacja: grupoid jako zbiór „strzałek”

$$\alpha(g) \xleftarrow{g} \beta(g)$$

Element, jego
początek i
koniec

$$\alpha(g) = \beta(gh) \xleftarrow{g} \beta(g) = \alpha(h) \xleftarrow{h} \beta(h) = \beta(gh)$$

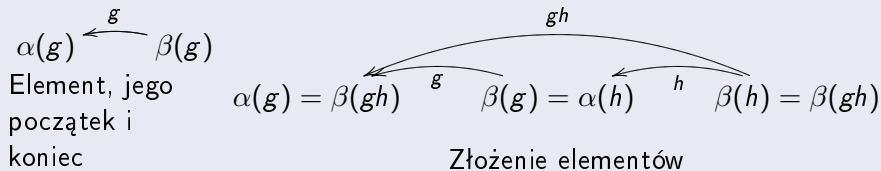
Złożenie elementów

Grupoidy: ogólny punkt widzenia

Definicja *H.Brandt, 1926*

Grupoidem z bazą B nazywamy zbiór $\mathcal{G}$ wyposażony w odwzorowania $\alpha, \beta : \mathcal{G} \rightarrow B$ oraz w działanie $(g, h) \mapsto gh$ spełniające aksjomaty 1-4.

Interpretacja: grupoid jako zbiór „strzałek”



Inna interpretacja: grupoid jako mała kategoria, w której każdy morfizm posiada odwrotny

„Mała” oznacza, że obiekty kategorii tworzą zbiór.

Grupoid symetrii „kawałka podłogi” B

Ograniczenie $\mathcal{G}$ do B

$$\mathcal{G}(G, \mathbb{R}^2)|_B := \{g \in \mathcal{G}(G, \mathbb{R}^2) \mid \alpha(g), \beta(g) \in B\}$$

Uwaga: B może być dowolnym podzbiorem $\mathbb{R}^2$

Grupoid symetrii „kawałka podłogi” B

Ograniczenie $\mathcal{G}$ do B

$$\mathcal{G}(G, \mathbb{R}^2)|_B := \{g \in \mathcal{G}(G, \mathbb{R}^2) \mid \alpha(g), \beta(g) \in B\}$$

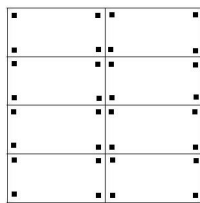
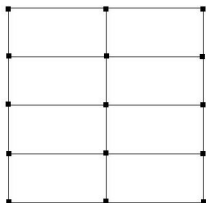
Uwaga: B może być dowolnym podzbiorem $\mathbb{R}^2$

Orbita „działania grupoidu $\mathcal{G}$ na B ”:

Klasa równoważności relacji „ $x \sim_{\mathcal{G}} y \iff \exists g \in \mathcal{G} : \alpha(g) = x, \beta(g) = y$ ”.

Na przykład, orbity $\mathcal{G}(G, \mathbb{R}^2) =$ orbity działania G na $\mathbb{R}^2$.

Przykłady orbit dla $\mathcal{G}(G, \mathbb{R}^2)|_B$ (są to „ślady” na B orbit $\mathcal{G}(G, \mathbb{R}^2)$):



Grupoidy związane z działaniem grupy G na zbiorze X

$$\mathcal{G}(G, X) := \{(x, \gamma, y) \mid x \in X, y \in X, \gamma \in G \text{ oraz } x = \gamma y\}$$

$$\mathcal{G}(G, X)|_B := \{g \in \mathcal{G}(G, X) \mid \alpha(g), \beta(g) \in B\} \text{ tutaj } B \subset X \text{ dowolny podzbiór.}$$

Grupoid par

Grupoidy związane z działaniem grupy G na zbiorze X

$$\mathcal{G}(G, X) := \{(x, \gamma, y) \mid x \in X, y \in X, \gamma \in G \text{ oraz } x = \gamma y\}$$

$\mathcal{G}(G, X)|_B := \{g \in \mathcal{G}(G, X) \mid \alpha(g), \beta(g) \in B\}$ tutaj $B \subset X$ dowolny podzbiór.

Grupoid par

Niech B będzie dowolnym zbiorem, a $G = \{e\}$ z trywialnym działaniem na B . Odpowiedni grupoid $\mathcal{G} := \mathcal{G}(G, B)$ nazywamy *grupoidem par*.

Inaczej mówiąc, $\mathcal{G} = B \times B$, $\alpha(x, y) = x$, $\beta(x, y) = y$, $(x, y)(y, z) := (x, z)$. Jedynekami są (x, x) , a odwrotność to $(x, y)^{-1} = (y, x)$.

Grupoid par

Grupoidy związane z działaniem grupy G na zbiorze X

$$\mathcal{G}(G, X) := \{(x, \gamma, y) \mid x \in X, y \in X, \gamma \in G \text{ oraz } x = \gamma y\}$$

$$\mathcal{G}(G, X)|_B := \{g \in \mathcal{G}(G, X) \mid \alpha(g), \beta(g) \in B\} \text{ tutaj } B \subset X \text{ dowolny podzbiór.}$$

Grupoid par

Niech B będzie dowolnym zbiorem, a $G = \{e\}$ z trywialnym działaniem na B . Odpowiedni grupoid $\mathcal{G} := \mathcal{G}(G, B)$ nazywamy *grupoidem par*.

Inaczej mówiąc, $\mathcal{G} = B \times B$, $\alpha(x, y) = x$, $\beta(x, y) = y$, $(x, y)(y, z) := (x, z)$. Jedynkami są (x, x) , a odwrotność to $(x, y)^{-1} = (y, x)$.

„Podgrupoidami” w $B \times B$ są relacje równoważności, a ich klasy są orbitami ich działań.

Ponadto, dla dowolnego grupoidu $\mathcal{G}$ nad B mamy morfizm grupoidów $(\alpha, \beta) : \mathcal{G} \rightarrow B \times B$, którego obrazem jest relacja równoważności $\sim_{\mathcal{G}}$.

Grupoidy Liego i ich obiekty infinitezymalne

Uwaga: Jeśli G grupa Liego, X rozmaitość i odpowiednie działanie jest gładkie, $\mathcal{G}(G, X)$ daje przykład *grupoidu Liego*. Ponadto, jeśli B podrozmaitość „dobrze” włożona względem działania, $\mathcal{G}(G, X)|_B$ też będzie takim przykładem.

Analogicznie, jeśli B rozmaitość, grupoid $B \times B$ jest grupoidem Liego.

Grupoidy Liego i ich obiekty infinitezymalne

Uwaga: Jeśli G grupa Liego, X rozmaitość i odpowiednie działanie jest gładkie, $\mathcal{G}(G, X)$ daje przykład *grupoidu Liego*. Ponadto, jeśli B podrozmaitość „dobrze” włożona względem działania, $\mathcal{G}(G, X)|_B$ też będzie takim przykładem.

Analogicznie, jeśli B rozmaitość, grupoid $B \times B$ jest grupoidem Liego.

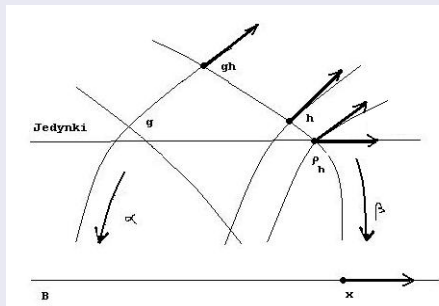
Lewoniezmiennicze pola wektorowe na $\mathcal{G}$

$T_{\beta^{-1}(x)}^\alpha \mathcal{G}$ podwązka wektorów stycznych do włókien α

{cięcia lewoniezm. $T_{\beta^{-1}(x)}^\alpha \mathcal{G}$ } =
= $T_{\rho_h}^\alpha \mathcal{G} =: \mathcal{A}_x$

$\mathcal{A} := \bigcup_{x \in B} \mathcal{A}_x$ wązka wektorowa nad B

$\kappa_x := T_{\rho_h} \beta : \mathcal{A}_x \rightarrow T_x B$ morfizm wążek



Grupoidy Liego i ich obiekty infinitezymalne

Uwaga: Jeśli G grupa Liego, X rozmaitość i odpowiednie działanie jest gładkie, $\mathcal{G}(G, X)$ daje przykład *grupoidu Liego*. Ponadto, jeśli B podrozmaitość „dobrze” włożona względem działania, $\mathcal{G}(G, X)|_B$ też będzie takim przykładem.

Analogicznie, jeśli B rozmaitość, grupoid $B \times B$ jest grupoidem Liego.

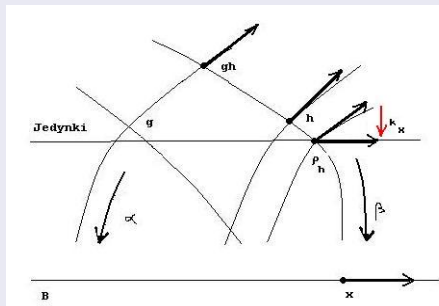
Lewoniezmiennicze pola wektorowe na $\mathcal{G}$

$T_{\beta^{-1}(x)}^\alpha \mathcal{G}$ podwiązka wektorów stycznych do włókien α

{cięcia lewoniezm. $T_{\beta^{-1}(x)}^\alpha \mathcal{G}$ } =
= $T_{\rho_h}^\alpha \mathcal{G} =: \mathcal{A}_x$

$\mathcal{A} := \bigcup_{x \in B} \mathcal{A}_x$ wiązka wektorowa nad B

$\kappa_x := T_{\rho_h} \beta : \mathcal{A}_x \rightarrow T_x B$ morfizm wiążek



Definicja

Algebroidem Liego nazywamy wiązkę wektorową $\mathcal{A} \rightarrow B$ wyposażoną w morfizm wiązek $\kappa : \mathcal{A} \rightarrow TB$ (nazywany *kotwicą*) oraz w operację algebry Liego $\{, \}$ na $\Gamma(\mathcal{A})$ o własnościach:

- 1 morfizm indukowany $\tilde{\kappa} : \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(TB)$ jest homomorfizmem algebr Liego;
- 2 $\{s_1, fs_2\} = f\{s_1, s_2\} + (\tilde{\kappa}(s_1)f)s_2$, $s_i \in \Gamma(\mathcal{A})$, $f \in C^\infty(B, \mathbb{R})$.

Algebroidy Liego

Definicja

Algebroidem Liego nazywamy wiązkę wektorową $\mathcal{A} \rightarrow B$ wyposażoną w morfizm wiązek $\kappa : \mathcal{A} \rightarrow TB$ (nazywany *kotwicą*) oraz w operację algebry Liego $\{, \}$ na $\Gamma(\mathcal{A})$ o własnościach:

- ❶ morfizm indukowany $\tilde{\kappa} : \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(TB)$ jest homomorfizmem algebr Liego;
- ❷ $\{s_1, fs_2\} = f\{s_1, s_2\} + (\tilde{\kappa}(s_1)f)s_2$, $s_i \in \Gamma(\mathcal{A})$, $f \in C^\infty(B, \mathbb{R})$.

Przykłady algebroidów i odpowiednich grupoidów

- Algebroid styczny: $\mathcal{A} = TB$, $\kappa = \text{Id}$, $\{, \} = [,]$
- Algebra Liego: $\mathcal{A} = \mathfrak{g}$, $B = \{*\}$
- Algebroid działania $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TB)$ algebry Liego
 $\mathcal{A} = \mathfrak{g} \times B$, $\kappa(g, x) = \rho(g)_x$, $\{g_1, g_2\}(x) = [g_1(x), g_2(x)]_{\mathfrak{g}} + (\rho(g_1(x))g_2)(x) - (\rho(g_2(x))g_1)(x)$
- $\mathcal{G} = B \times B$
- $\mathcal{G} = G$
- $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, B)$

Problem całkowania algebroidów Liego

Problem

- Czy każdy algebroid $\mathcal{A}$ jest *całkowalny*, tj. czy istnieje grupoid $\mathcal{G}$, dla którego $\mathcal{A}$ jest jego algebroidem $\mathcal{A}(\mathcal{G})$?
- Jeśli istnieje, na ile jednoznacznie jest określony?
- Wersja lokalna powyższych problemów.
- Problem całkowania morfizmów algebroidów $\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$.

Problem całkowania algebroidów Liego

Problem

- Czy każdy algebroid $\mathcal{A}$ jest *całkowalny*, tj. czy istnieje grupoid $\mathcal{G}$, dla którego $\mathcal{A}$ jest jego algebroidem $\mathcal{A}(\mathcal{G})$?
- Jeśli istnieje, na ile jednoznacznie jest określony?
- Wersja lokalna powyższych problemów.
- Problem całkowania morfizmów algebroidów $\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$.

Twierdzenie („Lie I”) *Moerdijk–Mačun, 2002*

Jeśli algebroid $\mathcal{A}$ jest całkowalny, to istnieje też jedyny grupoid $\mathcal{G}'$ o jednospójnych β -włóknach całkujący $\mathcal{A}$ (czyli $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{G}')$).

Problem całkowania algebroidów Liego

Problem

- Czy każdy algebroid $\mathcal{A}$ jest *całkowalny*, tj. czy istnieje grupoid $\mathcal{G}$, dla którego $\mathcal{A}$ jest jego algebroidem $\mathcal{A}(\mathcal{G})$?
- Jeśli istnieje, na ile jednoznacznie jest określony?
- Wersja lokalna powyższych problemów.
- Problem całkowania morfizmów algebroidów $\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$.

Twierdzenie („Lie I”) *Moerdijk–Mačun, 2002*

Jeśli algebroid $\mathcal{A}$ jest całkowalny, to istnieje też jedyny grupoid $\mathcal{G}'$ o jednospójnych β -włóknach całkujący $\mathcal{A}$ (czyli $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{G}')$).

Twierdzenie („Lie II”) *Mackenzie–Xu, 2000*

Niech $\phi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ będzie morfizmem algebroidów całkowalnych i niech $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ będą odpowiednie grupoidy. Jeśli $\mathcal{G}_1$ ma jednospójne β -włókna, to istnieje jedyny morfizm grupoidów $\Phi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ całkujący ϕ .

Problem całkowania algebroidów Liego

Lokalna całkowalność

Dla każdego algebroidu $\mathcal{A}$ istnieje *lokalny grupoid* całkujący $\mathcal{A}$.

Problem całkowania algebroidów Liego

Lokalna całkowalność

Dla każdego algebroidu $\mathcal{A}$ istnieje *lokalny grupoid* całkujący $\mathcal{A}$.

„Lie III”

Twierdzenie „Każdy algebroid jest całkowny, czyli posiada globalny grupoid całkujący” **nie jest prawdziwe!**

Problem całkowania algebroidów Liego

Lokalna całkowność

Dla każdego algebroidu $\mathcal{A}$ istnieje *lokalny grupoid* całkujący $\mathcal{A}$.

„Lie III”

Twierdzenie „Każdy algebroid jest całkowny, czyli posiada globalny grupoid całkujący” **nie jest prawdziwe!**

Twierdzenie (Przeszkody do „Lie III”) *Crainic–Fernandes, 2003*

Następujące warunki są równoważne:

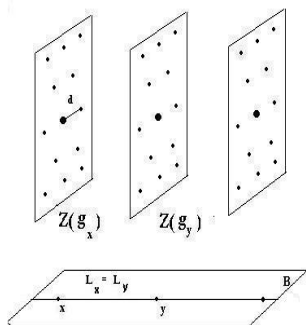
- 1 Algebroid $\mathcal{A}$ nad bazą B jest całkowny;
- 2 Dla każdego $x \in B$ grupa N_x jest dyskretna oraz $\liminf_{y \rightarrow x} r(y) > 0$.

$N_x \subset \mathcal{A}_x$ podzbiór elementów „homotopijnych z zerem” w centrum algebry Liego $\mathfrak{g}_x := \ker \kappa_x$ (tworzy grupę względem dodawania).
 $r(y) := d(0, N_y \setminus \{0\})$, (w sensie dowolnej normy na $\mathcal{A}$).

Twierdzenie Crainica–Fernandes: części składowe

$$\{s_1, fs_2\} = f\{s_1, s_2\} + (\tilde{\kappa}(s_1)f)s_2 \implies$$

$\mathfrak{g}_x = \ker \kappa_x$ algebra Liego

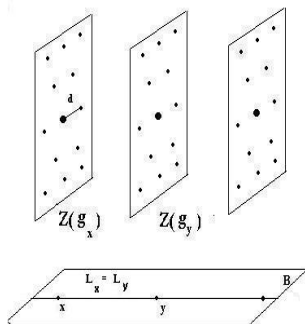


$\tilde{\kappa}$ homomorfizm $\implies \text{im } \kappa \subset TB$
dystrybucja całkowalna, L_x liść
odpowiedniej foliacji

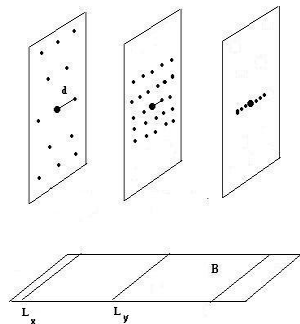
Twierdzenie Crainica–Fernandes: części składowe

$$\{s_1, fs_2\} = f\{s_1, s_2\} + (\tilde{\kappa}(s_1)f)s_2 \implies$$

$$\mathfrak{g}_x = \ker \kappa_x \text{ algebra Liego}$$



$N_x \subset Z(\mathfrak{g}_x)$ podgrupa, będąca obrazem $\partial : \pi_2(L_x) \rightarrow \mathcal{G}(\mathfrak{g}_x)$



$\tilde{\kappa}$ homomorfizm $\implies \text{im } \kappa \subset TB$
 dystrybucja całkowalna, L_x liść
 odpowiedniej foliacji

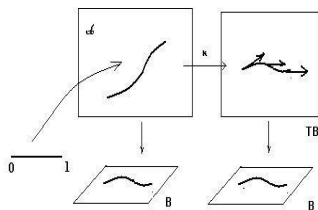
Twierdzenie Crainica–Fernandes: idea dowodu

(oparta na idei dowodu klasycznego twierdzenia „Lie III” w książce
J. Duistermaat, J. Kolk „Lie groups” (Springer, 2000))

Twierdzenie Crainica–Fernandes: idea dowodu

(oparta na idei dowodu klasycznego twierdzenia „Lie III” w książce
J. Duistermaat, J. Kolk „Lie groups” (Springer, 2000))

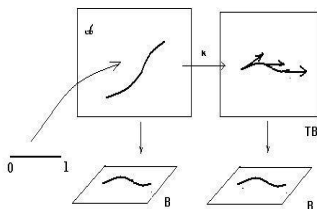
Krzywe dopuszczalne:



Twierdzenie Crainica–Fernandes: idea dowodu

(oparta na idei dowodu klasycznego twierdzenia „Lie III” w książce
J. Duistermaat, J. Kolk „Lie groups” (Springer, 2000))

Krzywe dopuszczalne:



- 1 Zbiór krzywych dopuszczalnych tworzy nieskończenie wymiarowy grupoid $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ nad B .
- 2 Iloraz $\mathcal{P}(\mathcal{A})/\sim$ względem odpowiedniej relacji homotopii ma strukturę grupoidu Liego.

Twierdzenie Crainica–Fernandes: przykładowe wnioski

- 1 Standardowe twierdzenie „Lie III” dla grup i algebr Liego
- 2 Twierdzenie Palais o całkowaniu infinitezymalnego działania algebry Liego do działania odpowiedniej grupy Liego
- 3 Twierdzenie o istnieniu grupoidu symplektycznego dla struktury Poissona

„Naturalny sposób dowodu twierdzenia Kartana (*twierdzenia „Lie III”, pryp. tłum.*) polega na zbudowaniu pewnego funktora z kategorii ... algebr Liego ... w kategorię jednospójnych grup Liego, który byłby kwaziodwrotny do funktora lokalizacji. Jednak dotychczas ... konstrukcji takiego funktora nikt nie wymyślił i, powiedzmy, Serr uważa, że ona nie istnieje ... Wszystkie wiadome dowody ... nie mają charakteru funktorialnego ... i wywołują wewnętrzny psychologiczny protest. Tutaj ostatnie słowo jeszcze nie jest wypowiedziane.”¹

M.M.Postnikow (1927–2004) „Grupy i algebry Liego”, (Nauka, 1982)

¹*tłumaczenie z rosyjskiego AP*

Dziękuję za uw $\mathcal{A}(\mathcal{G})_e$!