



WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

Tomografia komputerowa

Wykład inauguracyjny r.a. 2010/2011

Andriy Panasyuk

Katedra Algebry i Geometrii, WMiI

„Dramat matematyka”, Akt I



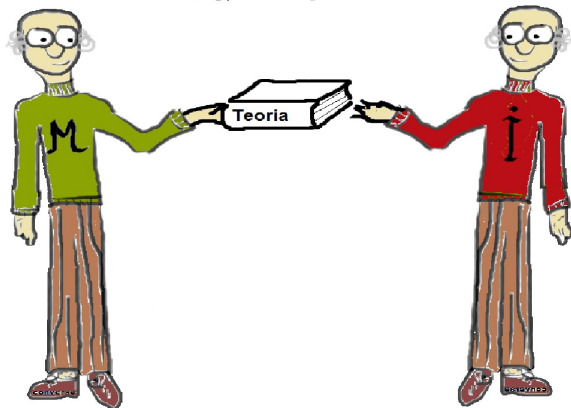
„Dramat matematyka”, Akt II



Akt III



Akt IV

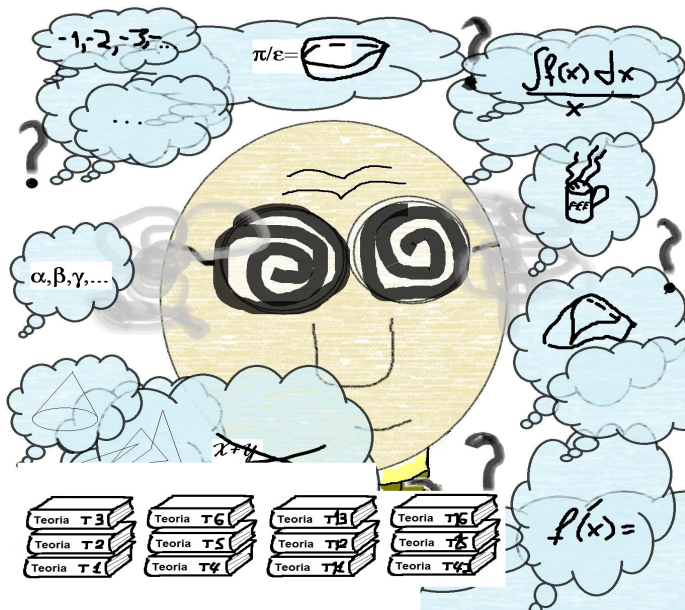


3. GENIALNY
INFORMATYK

Akt V



„Dramat matematyka”, Epilog



Wstęp: Czym jest tomografia?

Ogólnie

Tomografia jest nauką o tym, „jak można dowiedzieć się co jest w środku obiektu, nie otwierając go” (*Andrew Markoe, "Analytic Tomography", Cambridge University Press, 2006*).

Matematycznie

Tomografia jest dziedziną zajmującą się odtworzeniem informacji o obiekcie geometrycznym na podstawie jego przekrojów (greckie *τομος* oznacza przekrój, cięcie) lub rzutów.

Wstęp: Czym jest tomografia?

Ogólnie

Tomografia jest nauką o tym, „jak można dowiedzieć się co jest w środku obiektu, nie otwierając go” (*Andrew Markoe, "Analytic Tomography", Cambridge University Press, 2006*).

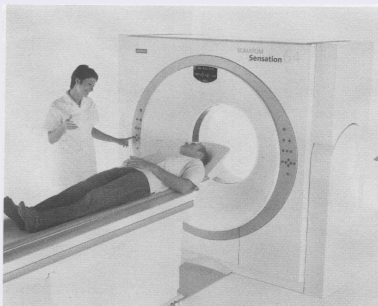
Matematycznie

Tomografia jest dziedziną zajmującą się odtworzeniem informacji o obiekcie geometrycznym na podstawie jego przekrojów (greckie $\tau\omicron\mu\omicron\sigma$ oznacza przekrój, cięcie) lub rzutów.

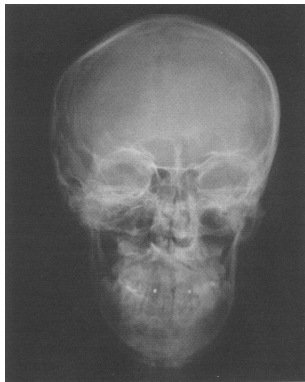
Wstęp: Narzędzia techniczne tomografii

Głównie są to tzw. skanery TK (tomografii komputerowej) używające *promieniowania rentgenowskiego* do prześwietlenia obiektu oraz algorytmów analizujących dane prześwietlenia i stosujących tomografię matematyczną do odtworzenia struktury wewnętrznej obiektu.

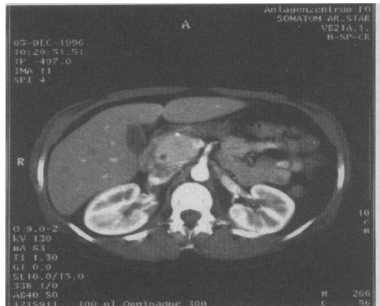
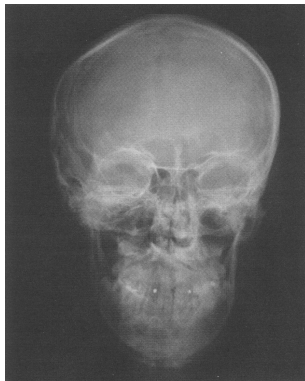
Typowy skaner TK:



Wstęp: Niedoskonałość „zwykłego” prześwietlenia rentgenowskiego

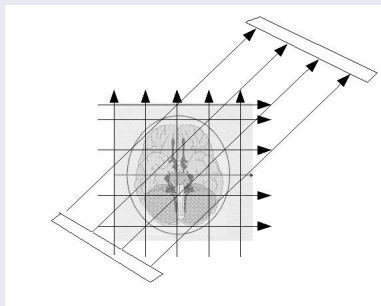


Wstęp: Niedoskonałość „zwykłego” prześwietlenia rentgenowskiego



Wstęp: Jak działa skaner TK?

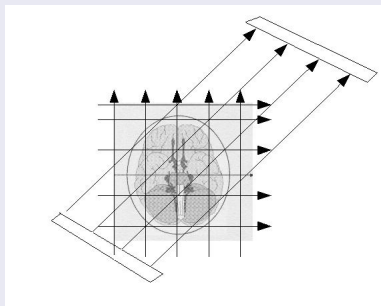
Etap I: prześwietlenie obiektu we „wszystkich” kierunkach i rejestracja danych prześwietlenia



Etap II: rekonstrukcja wewnętrznej struktury obiektu na podstawie danych otrzymanych na I etapie

Wstęp: Jak działa skaner TK?

Etap I: prześwietlenie obiektu we „wszystkich” kierunkach i rejestracja danych prześwietlenia

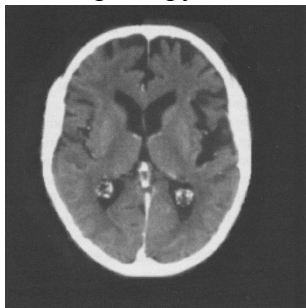


Etap II: rekonstrukcja wewnętrznej struktury obiektu na podstawie danych otrzymanych na I etapie

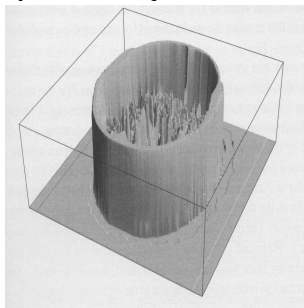
Matematyczny opis zagadnienia: Reprezentacja obiektu wyjściowego

Obiekt wyjściowy reprezentujemy w postaci *diagramu gęstości* lub *funkcji na płaszczyźnie*

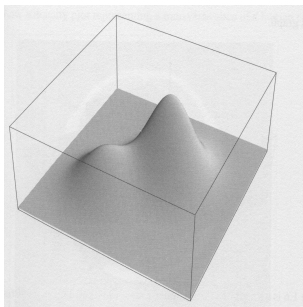
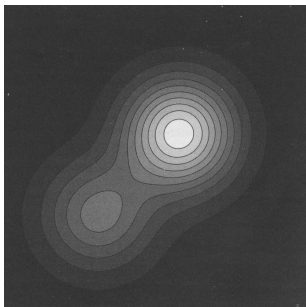
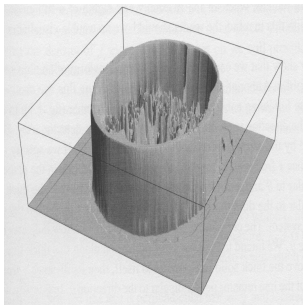
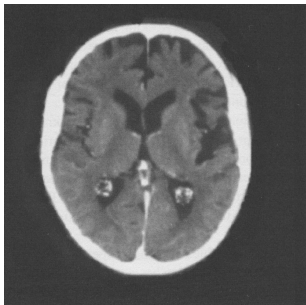
diagram gęstości



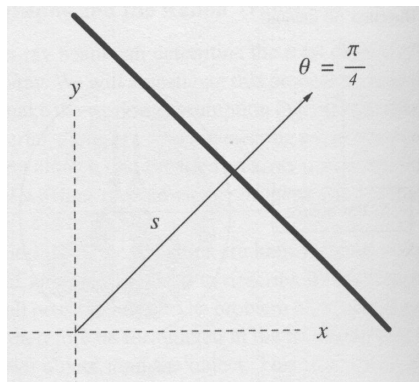
wykres funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



Reprezentacja obiektu wyjściowego

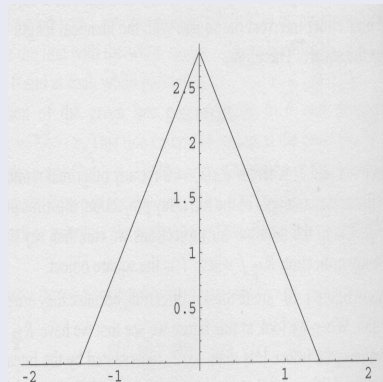
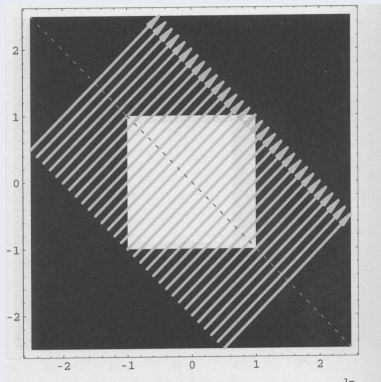


Matematyczny opis zagadnienia: Reprezentacja promienia rentgenowskiego

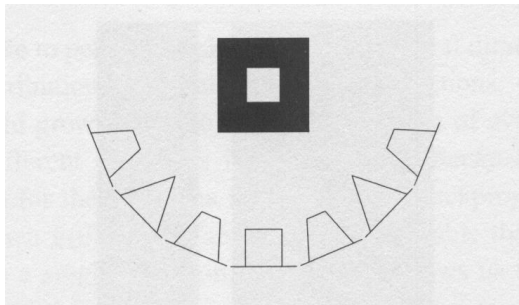
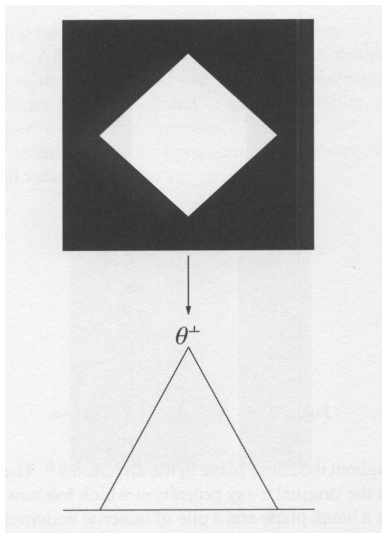


Matematyczny opis zagadnienia: Reprezentacja procesu prześwietlenia - transformata Radona

Transformata Radona $R_\theta f$ funkcji f w kierunku $\theta = \frac{3\pi}{4}$:

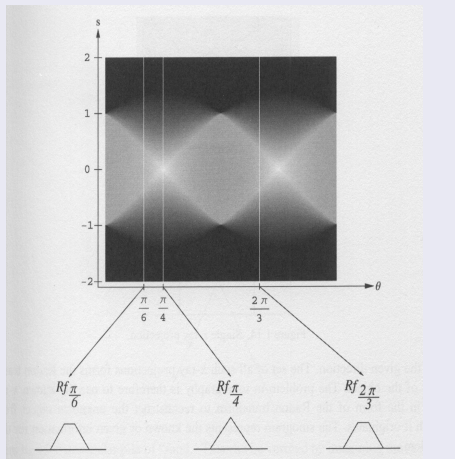
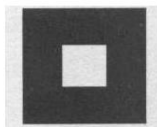


Matematyczny opis zagadnienia: Reprezentacja procesu prześwietlenia - transformata Radona



Matematyczny opis zagadnienia: Reprezentacja procesu prześwietlenia - transformata Radona

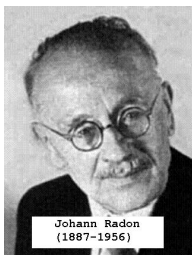
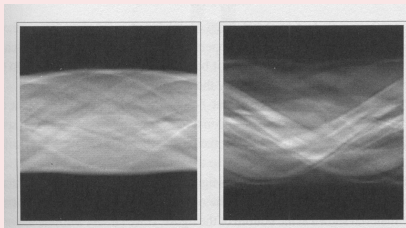
Transformata Radona jako funkcja 2 zmiennych $R_{\theta}f(s) = Rf(\theta, s)$



Matematyczny opis zagadnienia: Cel tomografii matematycznej

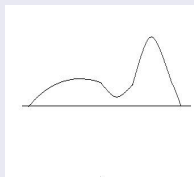
Cel: odtworzyć funkcję f według jej transformaty Radona Rf

??



Dygresja I: całkowanie funkcji

Funkcja jednej zmiennej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

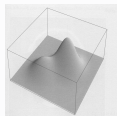


wykres funkcji



$\int f(x)dx$ = „pole pod wykresem”

Funkcja 2 zmiennych $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

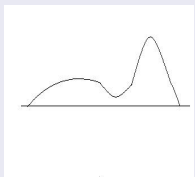


wykres funkcji

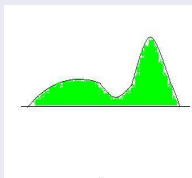
$\int f(x)dx$ = „objętość pod wykresem”

Dygresja I: całkowanie funkcji

Funkcja jednej zmiennej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

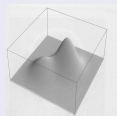


wykres funkcji



$\int f(x)dx$ = „pole pod wykresem”

Funkcja 2 zmiennych $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



wykres funkcji

$\int f(x)dx$ = „objętość pod wykresem”

Transformata Radona w sposób „bardziej zaawansowany”

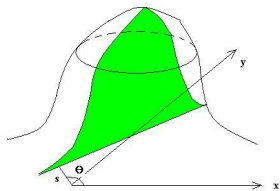
Definicja

Transformata Radona przekształca funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ w funkcję

$$Rf(\theta, s) := \int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx$$

określoną na walcu $Z^2 = S^1 \times \mathbb{R}$ (tutaj S^1 jest okręgiem jednostkowym).

Równanie $\langle \theta, x \rangle = s$ określa prostą w \mathbb{R}^2 prostopadłą do wektora $\theta \in S^1$ i odległą na s od zera.



Definicja

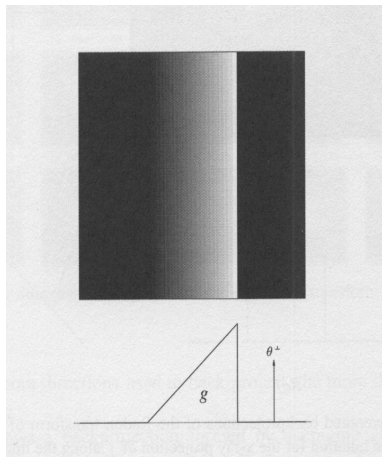
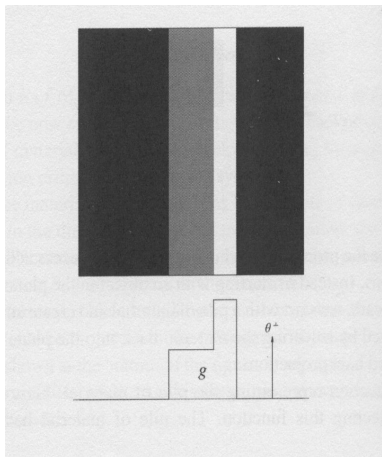
Rzut odwrotny przekształca funkcję $g : Z^2 = S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w funkcję

$$R^\# g(x) := \int_{S^1} g(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta$$

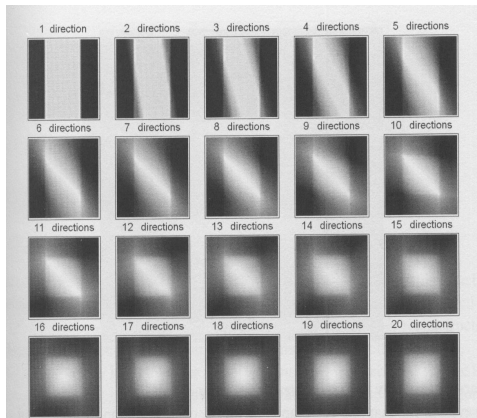
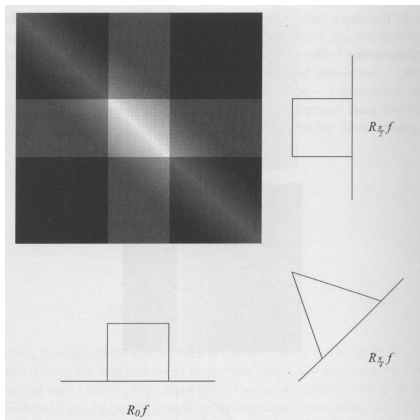
określoną na \mathbb{R}^2 .

Przy ustalonym θ funkcja $g(\theta, \langle x, \theta \rangle)$ jest przedłużeniem funkcji jednej zmiennej $g(\theta, s)$ do funkcji na \mathbb{R}^2 , stałej wzdłuż prostej prostopadłej do θ i odległej na s od zera

„Rzut odwrotny”: realizacja techniczna

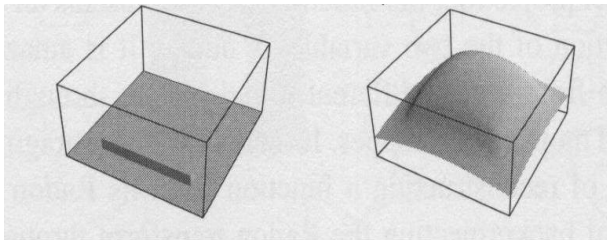


„Rzut odwrotny” dla kwadratu



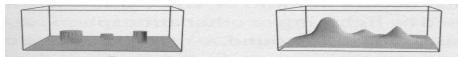
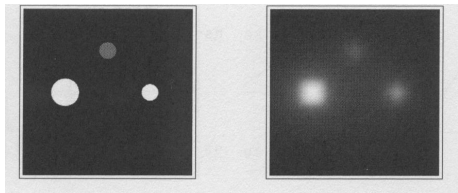
Różnica pomiędzy obiektem a jego odwzorowaniem

Kwadrat:



Różnica pomiędzy obiektem a jego odwzorowaniem

Inny obiekt:



Przyczyna matematyczna:

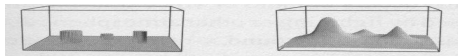
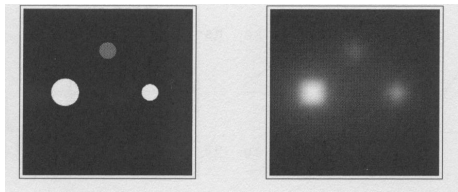
Twierdzenie: Jeśli f jest nieujemną funkcją na \mathbb{R}^2 taką, że funkcja $(1 + |x|)^{-1}f(x)$ jest całkowna, to

$$R^\# Rf = T * f,$$

gdzie $T(x) = \frac{c}{|x|}$ dla pewnej stałej c nie zależącej od f .

Różnica pomiędzy obiektem a jego odwzorowaniem

Inny obiekt:



Przyczyna matematyczna:

Twierdzenie: Jeśli f jest nieujemną funkcją na \mathbb{R}^2 taką, że funkcja $(1 + |x|)^{-1}f(x)$ jest całkowna, to

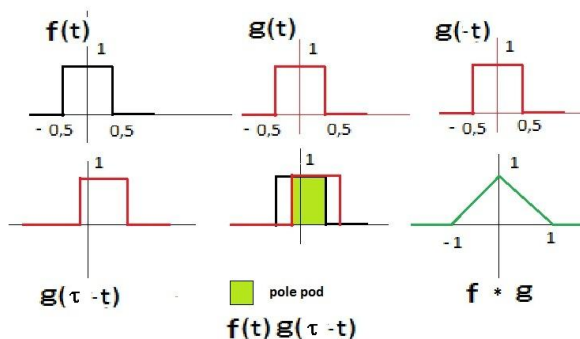
$$R^\# Rf = T * f,$$

gdzie $T(x) = \frac{c}{|x|}$ dla pewnej stałej c nie zależącej od f .

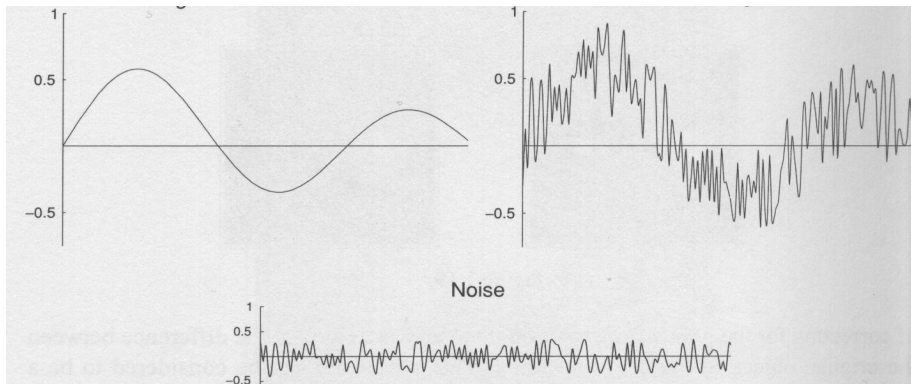
Definicja

$$f * g(\tau) = \int f(t)g(\tau - t)dt$$

Przykład



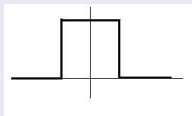
Interpretacja różnicy pomiędzy obiektem a jego odtworzeniem: szum



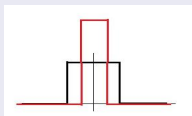
„Filtrowanie szumu” I

Twierdzenie o aproksymatywnej jedynce ϕ

Niech funkcja ϕ będzie nieujemna i spełnia $\int \phi(x)dx = 1$. Na przykład



Dla każdego $n = 1, 2, 3, \dots$ położmy $\phi_n(x) := n^{\text{wymiar}} \phi(nx)$. Na przykład



Wtedy dla „każdej” funkcji f ciąg funkcji

$$f * \phi_n(x), n = 1, 2, 3, \dots$$

przybliża funkcję f .

Twierdzenie o „odfiltrowanym rzucie odwrotnym”

Niech f będzie całkowalną funkcją na \mathbb{R}^2 , a v funkcją na walcu $Z^2 = S^1 \times \mathbb{R}$. Wtedy

$$R^\sharp(v) * f = R^\sharp(v * Rf).$$

Funkcję $A = R^\sharp(v)$ nazywamy *filtrem*, a v *funkcją odtwarzającą*.

Dalej szukamy funkcji odtwarzających v takich, że odpowiedni filtr $A = R^\sharp(v)$ stanowi *aproksymatywna jedynekę* i korzystamy z poprzedniego lematu, przybliżając funkcję f przez $A_n * f$, gdzie $A_n(x) = n^2 A(nx)$.

„Praktyczne stosowanie metody „odfiltrowanego rzutu odwrotnego” jest rodzajem sztuki. Odpowiedni wybór filtra ... oraz (koniecznie skończonej) liczby kierunków jest istotny do otrzymania optymalnej rekonstrukcji”
(Andrew Markoe, "Analytic Tomography", Cambridge University Press, 2006).

Twierdzenie o „odfiltrowanym rzucie odwrotnym”

Niech f będzie całkowalną funkcją na \mathbb{R}^2 , a v funkcją na walcu $Z^2 = S^1 \times \mathbb{R}$. Wtedy

$$R^\sharp(v) * f = R^\sharp(v * Rf).$$

Funkcję $A = R^\sharp(v)$ nazywamy *filtrem*, a v *funkcją odtwarzającą*.

Dalej szukamy funkcji odtwarzających v takich, że odpowiedni filtr $A = R^\sharp(v)$ stanowi *aproksymatywna jedynekę* i korzystamy z poprzedniego lematu, przybliżając funkcję f przez $A_n * f$, gdzie $A_n(x) = n^2 A(nx)$.

„Praktyczne stosowanie metody „odfiltrowanego rzutu odwrotnego” jest rodzajem sztuki. Odpowiedni wybór filtra ... oraz (koniecznie skończonej) liczby kierunków jest istotny do otrzymania optymalnej rekonstrukcji”
(Andrew Markoe, "Analytic Tomography", Cambridge University Press, 2006).

Twierdzenie o „odfiltrowanym rzucie odwrotnym”

Niech f będzie całkowalną funkcją na \mathbb{R}^2 , a v funkcją na walcu $Z^2 = S^1 \times \mathbb{R}$. Wtedy

$$R^\sharp(v) * f = R^\sharp(v * Rf).$$

Funkcję $A = R^\sharp(v)$ nazywamy *filtrem*, a v *funkcją odtwarzającą*.

Dalej szukamy funkcji odtwarzających v takich, że odpowiedni filtr $A = R^\sharp(v)$ stanowi *aproksymatywna jedynekę* i korzystamy z poprzedniego lematu, przybliżając funkcję f przez $A_n * f$, gdzie $A_n(x) = n^2 A(nx)$.

„Praktyczne stosowanie metody „odfiltrowanego rzutu odwrotnego” jest rodzajem sztuki. Odpowiedni wybór filtra ... oraz (koniecznie skończonej) liczby kierunków jest istotny do otrzymania optymalnej rekonstrukcji” (*Andrew Markoe, "Analytic Tomography", Cambridge University Press, 2006*).

Przykłady funkcji odtwarzających

Funkcja Nivergelta

$$v_b^N(\theta, s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi b^2} & \text{dla } |s| \leq b \\ \frac{1}{\pi b^2} \left(1 - \frac{|s|}{\sqrt{s^2 - b^2}}\right) & \text{dla } |s| > b \end{cases}$$

Funkcja Lakshminarayana–Ramachandrana

$$v_b^{LR}(\theta, s) = \frac{b^2}{4\pi^2} \left(\frac{\cos(bs) - 1}{b^2 s^2} + \frac{\sin(bs)}{bs} \right)$$

Funkcja Sheppa–Logana

$$v_b^{SL}(\theta, s) = \frac{b^2}{2\pi^3} \frac{\pi/2 - bs \sin(bs)}{(\pi/2)^2 - b^2 s^2}$$

Funkcja $\phi_b := R^\# v_b$ nie jest aproksymatywną jedyką ani dla $v_b = v_b^{LR}$, ani dla $v_b = v_b^{SL}$. Niemniej jednak, funkcje v_b^{LR} oraz v_b^{SL} dają lepszy wynik przybliżenia w „szumnych warunkach”.

Trochę o relacji „matematyka - informatyka”

- 1917 - artykuł J. Radona o rekonstrukcji funkcji f na podstawie jej transformaty Rf
- 1958 - pierwszy eksperyment dotyczący TK (Korenblum, Telebaum, Tyutin, Politechnika Kijowska): rekonstrukcja obrazu za pomocą zdjęć rentgenowskich z różnych kierunków, produkowania sygnałów elektrycznych na ich podstawie oraz procesowania za pomocą komputera analogowego
- 1979 - nagroda Nobla w dziedzinie fizjologii i medycyny dla Cormacka i Hounsfielda.
- Cormack (1963-64): rekonstrukcja przekroju obiektu niejednorodnego - pierwsze „tomogramy komputerowe” (wykorzystany „komputer” to kalkulator)
 - Hounsfield (1972): zaprojektował pierwszy komercyjnie dostępny skaner TK dla firmy EMI

Na zakończenie: o innych zastosowaniach transformaty Radona



