

Geometria różniczkowa

Andriy Panasyuk

Wykład 1: Pojęcie powierzchni gładkiej

Oznaczenia: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$: jest to podzbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ o tej własności, że wraz z każdym punktem $x \in U$ zawiera też pewną otwartą kulę $K \ni x$.

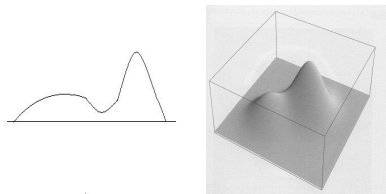
Odwzorowanie gładkie $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$: Jest to odwzorowanie odwzorowujące punkt $x \in \mathbb{R}^n$ w punkt $y \in \mathbb{R}^m$ zadawane przez m funkcji od n zmiennych

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\quad \vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

określonych na U , o tej własności, że w każdym punkcie $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$ istnieją wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} (f_i(\dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots) - f_i(\dots, x_j^0, \dots)) / \Delta x_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Z reguły będziemy wymagać też, żeby te pochodne cząstkowe były funkcjami *ciągłymi*. W szczególności, tak będzie, jeśli dla funkcji f_i istnieją pochodne cząstkowe drugiego rzędu $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$.

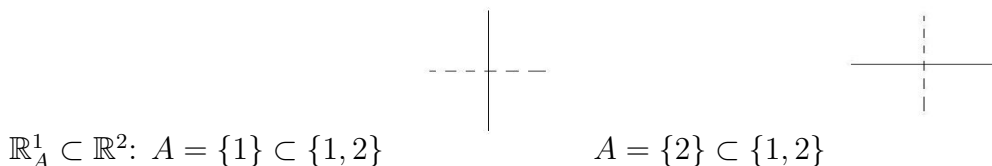
Wykres Γ_f odwzorowania $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$: jest to zbiór $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Inaczej $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x \in U, y = f(x)\}$.

PRZYKŁADY: Wykresy funkcji jednej i 2 zmiennych:



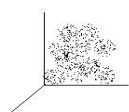
Współrzędnościowa płaszczyzna k -wymiarowa $\mathbb{R}_A^k \subset \mathbb{R}^l$: Jest to płaszczyzna w $\mathbb{R}^l$ zadana przez równania $x_{a_1} = 0, \dots, x_{a_{l-k}} = 0$ dla pewnego podzbioru $A = \{a_1, \dots, a_{l-k}\} \subset \{1, \dots, l\}$.

PRZYKŁADY PŁASZCZYZN WSPÓŁRZĘDNOŚCIOWYCH:



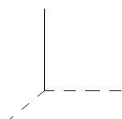
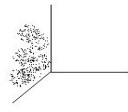
$\mathbb{R}_A^1 \subset \mathbb{R}^2: A = \{1\} \subset \{1, 2\}$

$A = \{2\} \subset \{1, 2\}$



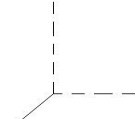
$$\mathbb{R}_A^2 \subset \mathbb{R}^3: A = \{1\} \subset \{1, 2, 3\}$$

$$A = \{2\} \subset \{1, 2, 3\}$$



$$\mathbb{R}_A^1 \subset \mathbb{R}^3: A = \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$$

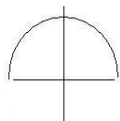
$$A = \{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$$



UWAGA: Wybór podzbioru $A \subset \{1, \dots, l\}$ zadaje rozkład $\mathbb{R}^l = \mathbb{R}_A^k \times \mathbb{R}_{\bar{A}}^{l-k}$, gdzie $\bar{A} = \{1, \dots, l\} \setminus A$.

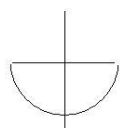
(Gładka) k -wymiarowa powierzchnia S w $\mathbb{R}^l$: Jest to podzbiór $S \subset \mathbb{R}^l$, który *lokalnie* jest wykresem odwzorowania gładkiego z $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^{l-k}$. Dokładniej ostatnie zdanie oznacza, że dla każdego $x \in S$ istnieją: 1) podzbiór $A_x \subset \{1, \dots, l\}$; 2) zbiór otwarty $U_x \subset \mathbb{R}_{A_x}^k \subset \mathbb{R}^l$; 3) odwzorowanie gładkie $f_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}_{\bar{A}_x}^{l-k}$; 4) zbiór otwarty $O_x \subset \mathbb{R}^l$; takie, że $S \cap O_x = \Gamma_{f_x}$.

PRZYKŁAD: Niech $S = \{(x_1, x_2) \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ będzie okręgiem jednostkowym. Wtedy S jest powierzchnią 1-wymiarową, bo dla $x \in O_x = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0\}$ możemy wziąć $A_x = \{2\}, U_x =$



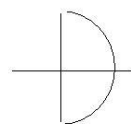
$$(-1, 1), f_x(x_1) = \sqrt{1 - (x_1)^2}$$

, dla $x \in O_x = \{(x_1, x_2) \mid x_2 < 0\}$ możemy wziąć $A_x =$



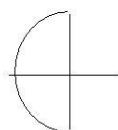
$$\{2\}, U_x = (-1, 1), f_x(x_1) = -\sqrt{1 - (x_1)^2}$$

, dla $x \in O_x = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0\}$ możemy



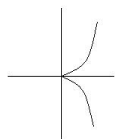
$$\text{wziąć } A_x = \{1\}, U_x = (-1, 1), f_x(x_2) = \sqrt{1 - (x_2)^2}$$

, dla $x \in O_x = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0\}$



$$\text{możemy wziąć } A_x = \{1\}, U_x = (-1, 1), f_x(x_2) = -\sqrt{1 - (x_2)^2}$$

INNY PRZYKŁAD: Zadajmy $S \subset \mathbb{R}^2$ jako obraz odwzorowania $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3)$. Wtedy $S \setminus \{(0, 0)\}$ jest powierzchnią 1-wymiarową: można ją przedstawić jako wykres odwzorowania $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni$



$$x_2 \mapsto (x_2)^{2/3}$$

. Zauważmy, że to odwzorowanie nie jest gładkie w zerze: $(x^{2/3})'(0) =$

$(2/3)x^{-1/3}|_0 = \infty$, czyli całe S nie koniecznie jest powierzchnią gładką. I rzeczywiście, istnienie „dziubka” w zerze „przemawia” za tym, że ona gładka w zerze nie jest.

Uwaga: Rozważmy krzywą $S = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = x_1^{1/3}\}$. Jest ona wykresem funkcji $f(x_1) = x_1^{1/3}$, która nie jest gładką w zerze ($(x_1^{1/3})'(0) = (1/3)x^{-2/3}|_0 = \infty$). Niemniej jednak, S jest powierzchnią gładką, bo może też być przedstawiona w postaci $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2^3\}$, czyli jest wykresem funkcji gładkiej $f(x_2) = x_2^3$. Dlatego, żeby na pewno stwierdzić, że krzywa z ostatniego przykładu nie jest gładka w zerze (czyli, że nie istnieje takiej funkcji gładkiej, której wykresem ona jest) potrzebne jest dodatkowe jej badanie.

Wykład 2: Sposoby określania powierzchni gładkich

Dwa sposoby zadawania powierzchni w $\mathbb{R}^l$: Przykłady z poprzedniego wykładu sugerują następujące sposoby zadawania powierzchni:

- I (poprzez równania) $S \subset \mathbb{R}^l$ zadaje się jako zbiór punktów $x \in \mathbb{R}^l$ spełniających równania $F_1(x) = 0, \dots, F_{l-k}(x) = 0$ dla pewnych funkcji $F_1, \dots, F_{l-k} : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ (w pierwszym przykładzie mamy jedną funkcję $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$). Inaczej mówiąc S jest *poziomicą zerową* $F^{-1}(0)$ pewnego odwzorowania $F : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{l-k}$.
- II (poprzez parametryzację) $S \subset \mathbb{R}^l$ zadaje się jako obraz pewnego odwzorowania $p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ (w drugim przykładzie jest to odwzorowanie $t \mapsto (t^2, t^3)$). Współrzędne w $\mathbb{R}^k$ są zwane też parametrami powierzchni S .

Ważne pytanie: Jakie warunki trzeba nałożyć na odwzorowanie F (przy I sposobie) oraz na p (przy drugim), żeby S było powierzchnią gładką. Okazuje się, że samej gładkości F (lub p) nie wystarcza. Istotnie, odwzorowanie $t \mapsto (t^2, t^3)$ jest gładkie (pochodne $(t^2)'$ oraz $(t^3)'$ istnieją wszędzie, nawet w zerze), ale określana przez nie powierzchnia nie.

Oznaczenia: Niech $F : \mathbb{R}^l \supset U \rightarrow \mathbb{R}^{l-k}$ będzie odwzorowaniem gładkim zadawanym przez funkcje

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_l), \\ \vdots, \\ F_{l-k}(x_1, \dots, x_l), \end{aligned}$$

oraz niech $A = \{a_1, \dots, a_{l-k}\} \subset \{1, \dots, l\}$. Oznaczmy przez $D_A(F, x)$ macierz kwadratową

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_{a_1}} & \cdots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_{a_{l-k}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{l-k}(x)}{\partial x_{a_1}} & \cdots & \frac{\partial F_{l-k}(x)}{\partial x_{a_{l-k}}} \end{bmatrix},$$

a przez $|D_A(F, x)|$ jej wyznacznik. Ostatni będziemy nazywać „jakobianem cząstkowym”.

Teraz, z kolei, niech $p : \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}^l$, gdzie $k < l$, będzie odwzorowaniem gładkim zadany przez funkcje

$$\begin{aligned} p_1(x_1, \dots, x_k), \\ \vdots, \\ p_l(x_1, \dots, x_k), \end{aligned}$$

a $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \{1, \dots, l\}$. W takiej sytuacji jakobianem cząstkowym $|D^A(p, x)|$ będziemy nazywać wyznacznik macierzy kwadratowej

$$D^A(p, x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{a_1}(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial p_{a_1}(x)}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_{a_k}(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial p_{a_k}(x)}{\partial x_k} \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie I: Niech $F : \mathbb{R}^l \supset U \rightarrow \mathbb{R}^{l-k}$ będzie odwzorowaniem gładkim oraz niech $x^0 \in U$ będzie wybrany punktem, a $y^0 = F(x^0) \in \mathbb{R}^{l-k}$ jego obrazem. Załóżmy, że istnieje takie $A = \{a_1, \dots, a_{l-k}\} \subset \{1, \dots, l\}$, dla którego

$$|D_A(F, x^0)| \neq 0.$$

Wtedy zbiór $S = \{x \in \mathbb{R}^l \mid F(x) = y^0\}$ jest gładką powierzchnią k -wymiarową w otoczeniu punktu x^0 .

Dowód tego twierdzenia wynika ze znanego z analizy *twierdzenia o funkcji uwikłanej*. Mianowicie, to twierdzenie mówi, że jeśli $|D_A(F, x^0)| \neq 0$, to S w otoczeniu x^0 jest wykresem pewnego odwzorowania gładkiego $f : \mathbb{R}_A^k \rightarrow \mathbb{R}_{\bar{A}}^{l-k}$.

PRZYKŁAD: Niech $S = \{(x_1, x_2) \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, wtedy $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, y^0 = 1$. Dla $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in S \cap O, O = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \neq 0\}$, możemy wziąć $A = \{2\}$ i mamy $|D_A(F, x^0)| = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^0) = 2x_2^0 \neq 0$. Dla $x^0 \in S \cap O, O = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq 0\}$, możemy wziąć $A = \{1\}$ i mamy $|D_A(F, x^0)| = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x^0) = 2x_1^0 \neq 0$.

INNY PRZYKŁAD: Krzywą, którą zadawaliśmy jako obraz odwzorowania $t \mapsto (t^2, t^3)$ możemy też określić jako $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1^3 - x_2^2 = 0\}$. Tutaj $F(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2$, gradient tej funkcji $\text{grad} F = (\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}) = (3x_1^2, -2x_2)$ znika w punkcie $(0, 0)$. Dlatego nie znajdzie się takiego $A \subset \{1, 2\}$, że odpowiedni jacobian cząstkowy $|D_A(F, (0, 0))| \neq 0$. W konsekwencji, krzywa S jest gładką wszędzie poza punktem $(0, 0)$.

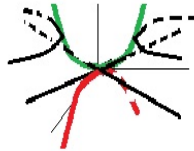
JESZCZE INNY PRZYKŁAD: Niech $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid -x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, x_3 = c\}$. Wtedy $F_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + x_2^2 - x_3, F_2(x_1, x_2, x_3) = x_3, y^0 = (0, c)$. Macierz Jakobiego tego odwzorowania ma postać

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 & 2x_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a cząstkowe jacobiany są postaci: $|D_A(F, x)| = \begin{vmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ dla $A = \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$,

$|D_A(F, x)| = \begin{vmatrix} 2x_1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x_1$ dla $A = \{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$ oraz $|D_A(F, x)| = \begin{vmatrix} -2x_2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2x_2$

dla $A = \{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$. Oznacza to, że w otoczeniu punktów $x \in S, x \neq (0, 0)$ zbiór S jest powierzchnią gładką, natomiast w punkcie $(0, 0)$ (który należy do S przy $c = 0$) nie koniecznie. Istotnie, S jest przecięciem powierzchni siodłowej $\{(x_1, x_2, x_3) \mid -x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0\}$ z płaszczyzną poziomą $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = c\}$. Dla $c \neq 0$ powierzchnia S jest hiperbolą $\{-x_1^2 + x_2^2 = c\}$ leżącą w płaszczyźnie $x_3 = c$, natomiast dla $c = 0$ hiperbola ta degeneruje się w sumę dwóch prostych $\{x_1 = \pm x_2\}$.



PRZYKŁAD: Niech $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + \sin x_1 = x_2 + \cos x_2\}$. Zauważmy, że jest trudnym pokazać, że S jest powierzchnią gładką (jak wyrazimy x_1 przez x_2 lub x_2 przez x_1 ?). Twierdzenie I, natomiast daje następującą odpowiedź: $F(x) = x_1 + \sin x_1 - x_2 - \cos x_2, \text{grad} F = (1 + \cos x_1, -1 + \sin x_2)$. Gradient jest równy $(0, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos x_1 = -1, \sin x_2 = 1$ czyli $x_1 = \pi + 2N\pi, x_2 = \pi/2 + 2L\pi, N, L \in \mathbb{Z}$. Łatwo sprawdzić, że żaden z takich punktów (x_1, x_2) nie należy do S . Stąd S jest powierzchnią gładką.

Twierdzenie II: Niech $p : \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}^l (k < l)$ będzie odwzorowaniem gładkim oraz niech $x^0 \in U$ będzie wybranym punktem, a $y^0 = p(x^0) \in \mathbb{R}^l$ jego obrazem. Załóżmy, że istnieje takie $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \{1, \dots, l\}$, dla którego

$$|D^A(p, x^0)| \neq 0.$$

Wtedy zbiór $S = p(U) = \{p(x) \in \mathbb{R}^l \mid x \in U\}$ jest gładką powierzchnią k -wymiarową w otoczeniu punktu y^0 .

Dowód tego twierdzenia z kolei wynika z innego twierdzenia z analizy, mianowicie z *twierdzenia o rzędzie maksymalnym*. Twierdzenie to mówi, że obraz odwzorowania gładkiego, którego macierz Jakobiego ma rząd stały jest lokalnie wykresem (jeśli w dodatku ten rząd jest maksymalny, wykres ten ma odpowiedni wymiar).

Przypomnienie z algebry: *Rząd macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & \cdots & \\ a_{l1} & \cdots & a_{lk} \end{bmatrix}$$

określa się jako maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn (równoważnie, maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy). Inny sposób określenia rzędu: jest to maksymalny wymiar „podmacierzy kwadratowej” o niezerowym wyznaczniku.

PRZYKŁAD: Po raz kolejny wracamy do przykładu odwzorowania $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, p(t) = (t^2, t^3)$. Jego macierz Jakobiego ma postać

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix},$$

co w punkcie $t = 0$ daje $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Jasne, że rząd tej macierzy poza $t = 0$ jest równy 1 (bo 1×1 -podmacierze $2t$ oraz $3t^2$ mają wyznaczniki niezerowe. Natomiast dla $t = 0$ rząd tej macierzy jest równy zeru. Czyli po raz kolejny otrzymaliśmy potwierdzenie faktu, iż obraz p jest powierzchnią gładką poza punktem $(0, 0)$.

PRZYKŁAD: Rozważmy odwzorowanie $p : (r, s) \mapsto (r, rs, s)$. Tutaj $p_1(r, s) = r, p_2(r, s) = rs, p_3(r, s) = s$, odpowiednia macierz Jakobiego jest równa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podmacierze 2×2 oraz ich wyznaczniki są następujące: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ s & r \end{vmatrix} = r, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} s & r \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = s$. Stąd rząd macierzy Jakobiego nie zależy od punktu $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ (czyli jest stały) oraz jest maksymalny (równy 2 - większych podmacierzy kwadratowych nie ma). Obraz odwzorowania p jest gładką powierzchnią 2-wymiarową w $\mathbb{R}^3$. *Ćwiczenie:* Udowodnij, że obraz p jest w pewnych współrzędnych w.w. powierzchnią siodłową.

Wykład 3: Przestrzeń styczna do powierzchni gładkiej I

(Przypomnienie z algebry) Przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{R}$: Jest to zbiór L wyposażony w działania $+: L \times L \rightarrow L$ oraz $\cdot: \mathbb{R} \times L \rightarrow L$ spełniających warunki:

1. $(L, +)$ jest grupą przemenną (z elementem neutralnym oznaczanym przez 0);
2. $1 \cdot x = x \ \forall x \in L$;
3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \in L$;
4. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \in L$;
5. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, x, y \in L$.

PRZYKŁAD: $L = \mathbb{R}^n, 0 = (0, \dots, 0)$ z naturalnymi operacjami dodawania wektorów i mnożenia przez skalary z $\mathbb{R}$.

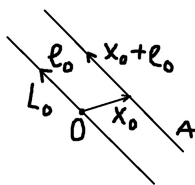
Przestrzeń afiniczna nad przestrzenią wektorową L : Jest to zbiór A wyposażony w działanie $+: A \times L \rightarrow A$ o własnościach:

1. $a + (x + y) = (a + x) + y \ \forall x, y \in L, a \in A$;
2. $a + 0 = a \ \forall a \in A$;
3. $\forall a, b \in A \exists! x \in L : b = a + x$.

Wymiarem przestrzeni A nazywamy wymiar L .

PRZYKŁAD: Samo L jest przestrzenią afiniczną nad sobą.

PRZYKŁAD PODSTAWOWY (PODPRZESTRZEŃ AFINICZNA W PRZESTRZENI WEKTOROWEJ): Niech $L_0 \subset L$ będzie podprzestrzenią wektorową, a $x^0 \in L$ wybranym wektorem. Wtedy zbiór $A = x^0 + L_0 = \{x^0 + l \mid l \in L_0\}$ jest przestrzenią afiniczną nad L_0 .



Istotnie, do $x^0 + x \in A$ można dodać $y \in L_0$, a wynik będzie leżał w A . Łatwo sprawdzić spełnienie aksjomatów 1-3 (np. dla $a = x^0 + l, b = x^0 + m$ jedyne $x \in L_0$ o własności $b = a + x$ jest dane wzorem $x = m - l$).

W szczególnym przypadku jednowymiarowej podprzestrzeni afinicznej A w $\mathbb{R}^2$ (ze współrzędnymi x_1, x_2) można ją zadawać równaniem $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Wtedy przestrzeń liniowa L_0 , nad którą A jest określona, szukamy z równania $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$. *Ćwiczenie:* jak znaleźć punkt $x^0 \in \mathbb{R}^2$ taki, że $A = x^0 + L_0$?

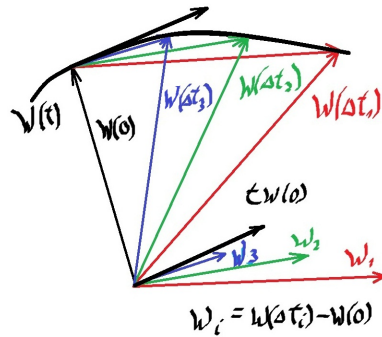
Uwaga: Różnica pomiędzy przestrzenią afiniczną A nad L oraz samą przestrzenią wektorową L z grubsza polega na tym, że A nie ma wyróżnionego wektora zerowego. Ponadto, wybierając dowolny punkt $x^0 \in A$ możemy tę różnicę zniwelować (utożsamiamy wtedy L i A za pomocą wzoru $l \mapsto x^0 + l$).
Ćwiczenie: udowodnij, że to odwzorowanie zadaje bijekcję pomiędzy tymi zbiorami.

(Jeszcze jedno przypomnienie) Podprzestrzeń wektorowa generowana przez podzbiór:

Niech L będzie przestrzenią wektorową, a $X \subset L$ dowolnym podzbiorem. Podprzestrzeń wektorowa $\text{Span } X$ generowana przez X składa się ze wszystkich skończonych kombinacji liniowych $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{R}, x_i \in X$. Jest to najmniejsza podprzestrzeń wektorowa w L zawierająca X .

Łuk sparametryzowany w $\mathbb{R}^n$: Jest to odwzorowanie gładkie $w : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n, w(t) = (w_1(t), \dots, w_n(t))$.

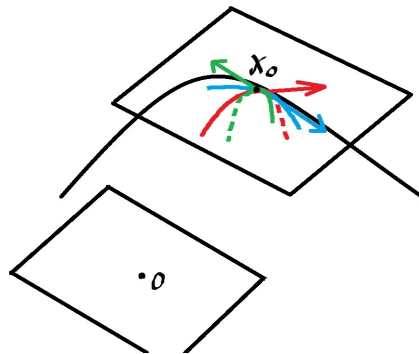
Wektor styczny $tw(0)$ do łuku sparametryzowanego w w punkcie $w(0)$: jest to wektor $(w'_1(0), \dots, w'_n(0)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{w(\Delta t) - w(0)}{\Delta t}$.



Uwaga: Bardziej naturalnym jest uważać, że wektor styczny jest „zaczepiony” nie w zerze, tylko w punkcie $w(0)$, czyli jest elementem 1-wymiarowej podprzestrzeni afinicznej w $\mathbb{R}^n$ zawierającej punkt x^0 . Poniżej będziemy robić rozróżnienie pomiędzy „liniową” a „afiniczną” przestrzenią styczną.

Przestrzeń styczna $T_{x^0}S$ (liniowa) do powierzchni gładkiej $S \subset \mathbb{R}^n$ w punkcie $x^0 \in S$: Jest to podprzestrzeń wektorowa w $\mathbb{R}^n$ generowana przez wektory styczne w punkcie x^0 do wszystkich łuków sparametryzowanych $w : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ o własnościach: 1) $w(0) = x^0$; 2) $w((-1, 1)) \subset S$.

Afiniczna przestrzeń styczna $T_{x^0}^a S$ do powierzchni gładkiej $S \subset \mathbb{R}^n$ w punkcie $x^0 \in S$: Jest to podprzestrzeń afiniczna $x^0 + T_{x^0}S$ w $\mathbb{R}^n$.



Jak obliczamy przestrzeń styczną do powierzchni zadanej I sposobem:

Twierdzenie Niech $S \subset \mathbb{R}^l$ będzie powierzchnią gładką k -wymiarową zadaną jako zbiór punktów $x \in \mathbb{R}^l$ spełniających równania $F_1(x) = 0, \dots, F_{l-k}(x) = 0$ dla pewnych funkcji gładkich $F_1, \dots, F_{l-k} : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ (zakładamy, że warunki Twierdzenia I są spełnione). Wtedy $T_{x^0}S \subset \mathbb{R}^l$ jest podprzestrzenią wektorową, którą wyznaczamy z układu równań liniowych

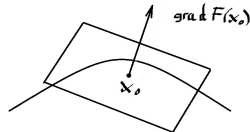
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(x^0)}{\partial x_l} \\ \frac{\partial F_{l-k}(x^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{l-k}(x^0)}{\partial x_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Innymi słowy $T_{x^0}S$ jest jądrem macierzy Jakobiego $D(F, x^0)$ odwzorowania F obliczonej w punkcie x^0 .

Przykład: W szczególnym przypadku, gdy S jest zadana jako poziomica $F^{-1}(0)$ jednej funkcji gładkiej $F : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$, powyższe równania mają postać

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F(x^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F(x^0)}{\partial x_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix} = 0,$$

czyli $\text{grad}F(x^0) \cdot y = 0$, gdzie $\cdot$ tym razem oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^l$. Innymi słowy, przestrzeń styczna w tym przypadku jest hiperpłaszczyzną prostopadłą do gradientu funkcji F obliczonego w punkcie x^0 .



Dowód twierdzenia w tym szczególnym przypadku: Niech $w : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^l$ będzie łukiem sparametryzowanym o własnościach $w(0) = x^0$ oraz $w((-1, 1)) \subset S$. Druga własność w szczególności oznacza, że $F(w_1(t), \dots, w_l(t)) \equiv 0$. Zróżniczkujemy ostatnią równość dla $t = 0$ używając prawa różniczkowania funkcji złożonej:

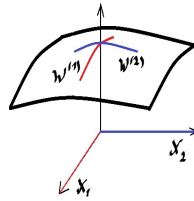
$$\frac{\partial F(w_1(0))}{\partial x_1} w'_1(0) + \dots + \frac{\partial F(w_l(0))}{\partial x_l} w'_l(0) = 0.$$

Lewa część tego wyrażenia jest równa $\text{grad}F(x^0) \cdot \mathbf{t}w(0)$. Tym samym wykazaliśmy, że wektory styczne do każdego łuku sparametryzowanego w o własnościach $w(0) = x^0$ oraz $w((-1, 1)) \subset S$ są prostopadłe do $\text{grad}F(x^0)$.

Wykład 4: Przestrzeń styczna do powierzchni gładkiej II

Kontynuacja dowodu twierdzenia z Wykładu 3: Zostało pokazać, że te wektory styczne wyczerpują całą przestrzeń prostopadłą do $\text{grad}F(x^0)$. W tym celu przypomnijmy sobie, że S jest powierzchnią gładką (gwarantuje nam to Twierdzenie I z Wykładu 2), czyli, że w otoczeniu punktu x^0 zbiór S jest wykresem pewnej funkcji $f : \mathbb{R}_A^{l-1} \rightarrow \mathbb{R}$ (tutaj $A = \{a_1, \dots, a_{l-1}\} \subset \{1, \dots, l\}$ jest pewnym podzbiorem). Załóżmy dla uproszczenia, że $A = \{1, \dots, l-1\}$ oraz, że punkt $x^0 \in S$ ma współrzędne $(0, \dots, 0, f(0, \dots, 0))$. Określmy teraz łuki sparametryzowane wzorami

$$\begin{aligned} w^{(1)}(t) &= (t, 0, \dots, 0, f(t, 0, \dots, 0)) \\ w^{(2)}(t) &= (0, t, \dots, 0, f(0, t, \dots, 0)) \\ &\dots \\ w^{(l-1)}(t) &= (0, 0, \dots, t, f(0, 0, \dots, t)). \end{aligned}$$



Jasne jest, że $w^{(j)}(0) = x^0$ oraz $w^{(j)}(t) \in S$. Z kolei ich wektory styczne

$$\begin{aligned} \mathbf{t}w^{(1)}(0) &= (1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0, \dots, 0)) \\ \mathbf{t}w^{(2)}(0) &= (0, 1, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0, \dots, 0)) \\ &\dots \\ \mathbf{t}w^{(l-1)}(0) &= (0, 0, \dots, 1, \frac{\partial f}{\partial x_{l-1}}(0, 0, \dots, 0)) \end{aligned}$$

są liniowo niezależne. To pokazuje, że przestrzeń styczna ma wymiar co najmniej $l-1$, czyli musi pokrywać się z przestrzenią prostopadłą do $\text{grad}F(x^0)$. $\square$

Wniosek: Wymiar przestrzeni stycznej $T_{x^0}S$ do powierzchni gładkiej k -wymiarowej S jest równy k .

Istotnie, jeśli S jest zadana I sposobem, powyższe twierdzenie pokazuje, że $T_{x^0}S$ jest jądrem macierzy Jakobiego $D(F, x^0)$. Z Twierdzenia I wiemy, że rząd tej macierzy jest równy $l-k$. Stąd jej jądro (czyli właśnie $T_{x^0}S$) ma wymiar $l - (l-k) = k$. Korzystamy tu z twierdzenia z algebry liniowej, które mówi, że wymiar jądra macierzy $(l-k) \times l$ plus wymiar jej obrazu (równy jej rządowi) stanowi l .

Z drugiej strony, każda powierzchnia gładka k -wymiarowa lokalnie może być zadana I sposobem tak, żeby były spełnione warunki Twierdzenia I. Istotnie, jeśli S lokalnie jest wykresem odwzorowania gładkiego $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{l-k}$ zadanego przez funkcje $f_1, \dots, f_{l-k}$ (czyli lokalnie $S = \Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_k, f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_{l-k}(x_1, \dots, x_k))\}$), jako równania możemy wziąć $F_1(x) = x_{k+1} - f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, F_{l-k}(x) = x_{k+(l-k)} - f_{l-k}(x_1, \dots, x_k)$. *Ćwiczenie:* Udowodnij, że warunki Twierdzenia I są spełnione.

Jak obliczamy przestrzeń styczną do powierzchni zadanej II sposobem:

Twierdzenie Niech $S \subset \mathbb{R}^l$ jest powierzchnią gładką k -wymiarową określona jako obraz $p(U)$ odwzorowania gładkiego $p : \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}^l$ ($k < l$) zadanego za pomocą pewnych funkcji gładkich $p_1, \dots, p_l : \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ (zakładamy, że warunki Twierdzenia II są spełnione). Wtedy $T_{x^0}S \subset \mathbb{R}^l$ jest podprzestrzenią wektorową, która jest obrazem odwzorowania liniowego $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ zadanego przez macierz Jakobiego $D(p, y^0)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial p_1(y^0)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial p_1(y^0)}{\partial y_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_l(y^0)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial p_l(y^0)}{\partial y_k} \end{bmatrix}$$

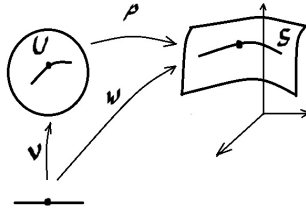
odwzorowania p (tutaj $y^0 \in U$ jest takim punktem, że $p(y^0) = x^0$).

Dowód: Niech $w : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^l$ będzie łukiem sparametryzowanym o własnościach $w(0) = x^0$, $w((-1, 1)) \subset S$. Załóżmy dla uproszczenia, że odwzorowanie $p : \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}^l$ jest iniektywne. To oznacza, że dla każdego $x \in S$ istnieje jedyne $y \in U$ takie, że $p(y) = x$. Oznaczmy $y = p^{-1}(x)$. Mamy własność

$$w(t) = p(p^{-1}(w(t))).$$

Oznaczmy też $v(t) = p^{-1}(w(t))$, jest to łuk sparametryzowany $(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^k$, niech $v_1(t), \dots, v_k(t)$ będą jego składowe. Powyższa własność może być przepisana jako $w(t) = p(v(t))$ lub dokładniej:

$$w_1(t) = p_1(v_1(t), \dots, v_k(t)), \dots, w_l(t) = p_l(v_1(t), \dots, v_k(t)).$$



Zróżniczkujemy te wyrażenia po t w zerze (zauważmy, że $v(0) = y^0$). Po lewej stronie otrzymamy składowe wektora stycznego $tw(0)$, a po prawej (według reguły różniczkowania funkcji złożonej):

$$\frac{\partial p_i(y^0)}{\partial y_1} v'_1(0) + \dots + \frac{\partial p_i(y^0)}{\partial y_k} v'_k(0), i = 1, \dots, l.$$

Innymi słowy, wektor $w'(0)$ jest wynikiem zastosowania macierzy Jakobiego $D(p, y^0)$ do wektora $(v'_1(0), \dots, v'_k(0))$, czyli jest zawarty w obrazie tej macierzy.

Teraz zostało pokazać, iż każdy wektor z tego obrazu jest generowany przez wektory styczne. W tym celu przypomnijmy sobie, że rząd macierzy $D(p, y^0)$ jest maksymalny i równy k (zob. Twierdzenie II Wykładu 2). To znaczy, że wymiar jej obrazu jest też równy k . Z drugiej strony my wiemy, że wymiar $T_{x^0}S$ też jest równy k (zob. Wniosek powyżej). Stąd relacja $T_{x^0}S \subset \text{im } D(p, y^0)$ (którą udowodniliśmy) jest równością.

Przykład: Niech $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, p(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ będzie parametryzacją okręgu jednostkowego S .

Wtedy $D(p, t^0) = p'(t^0) = \begin{bmatrix} -\sin t^0 \\ \cos t^0 \end{bmatrix}$. Obraz macierzy jest rozpięty przez jej kolumny, czyli w tym

przypadku przestrzeń styczna $T_{(\cos t^0, \sin t^0)}S$ jest rozpięta przez wektor $(-\sin t^0, \cos t^0)$. I istotnie, łatwo się przekonać, że wektor ten („wektor prędkości”) jest prostopadły do wektora „położenia” $(\cos t^0, \sin t^0)$.

Wykład 5: Geometria krzywych I

Literatura dodatkowa: [Fic04]

Krzywa gładka $S \subset \mathbb{R}^l$: Jest to powierzchnia gładka wymiaru 1.

Styczność rzędu n dwóch łuków sparametryzowanych: Niech $p, q : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^l$ będą dwoma łukami sparametryzowanymi o tej własności, że ich wszystkie pochodne w zerze do rzędu n włącznie istnieją i są niezerowe. Mówimy, że są *styczne rzędu n* ($n = 0, 1, 2, \dots$) w punkcie $x^0 \in \mathbb{R}^l$, jeśli

$$p(0) = q(0) = x^0, p'(0) = q'(0), p''(0) = q''(0), \dots, p^{(n)}(0) = q^{(n)}(0).$$

W szczególności p i q są styczne rzędu 0, gdy mają jednakową wartość w zerze równą x^0 , i są styczne rzędu 1, gdy ponadto mają jednakowe wektory styczne w x^0 .

Styczność rzędu n dwóch krzywych gładkich: Mówimy, że dwie krzywe $P, Q \subset \mathbb{R}^l$ są *styczne rzędu n* ($n = 0, 1, 2, \dots$) w punkcie $x^0 \in \mathbb{R}^l$, jeśli istnieją łuki sparametryzowane $p, q : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^l$ o własności

$$\text{im } p \subset P, \text{im } q \subset Q,$$

które są styczne rzędu n w punkcie x^0 . W szczególności P i Q są styczne rzędu 0, gdy x^0 jest ich punktem wspólnym, i są styczne rzędu 1, gdy ponadto $T_{x^0}P = T_{x^0}Q$.

Warunki styczności rzędu 1 i 2 dla krzywych płaskich: Niech teraz $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ przy czym niech P będzie zadana jako $\text{im } p$ dla pewnego łuku sparametryzowanego $p : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ (P zadana II sposobem, zakładamy dodatkowo, że warunki Twierdzenia II są spełnione, czyli $p'(0) \neq (0, 0)$), a Q będzie zadana jako $\{(x_1, x_2) \mid F(x_1, x_2) = 0\}$ (Q zadana I sposobem, zakładamy dodatkowo, że warunki Twierdzenia I są spełnione, czyli $\text{grad}F(x^0) \neq (0, 0)$). Ponadto, niech $p(0) = x^0 \in Q$ (czyli P i Q są styczne rzędu 0 w punkcie x^0). Ponadto zakładamy, że odwzorowania p i F są dwukrotnie różniczkowalne.

TWIERDZENIE:

1. Krzywe P i Q są styczne rzędu 1 w punkcie x^0 wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^0)p'_1(0) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^0)p'_2(0) = 0. \quad (1)$$

2. Krzywe P i Q są styczne rzędu 2 w punkcie x^0 wtedy i tylko wtedy gdy równość (1) jest spełniona oraz

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x^0)(p'_1(0))^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0)p'_1(0)p'_2(0) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x^0)(p'_2(0))^2 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x^0)p''_1(0) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^0)p''_2(0) = 0 \quad (2)$$

tutaj $(p_1(t), p_2(t)) = p(t)$ są współrzędnymi $p(t)$ w $\mathbb{R}^2$.

Dowód: Niech P i Q będą styczne rzędu 1 w punkcie x^0 . Według definicji muszą wtedy istnieć łuki sparametryzowane $\tilde{p}, q : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^l$ o własności

$$\text{im } \tilde{p} \subset P, \text{im } q \subset Q,$$

które są styczne rzędu 1 w punkcie x^0 ($\tilde{p}$ może się różnić od p). Skoro $im\ q \subset Q$, mamy

$$F(q_1(t), q_2(t)) = 0. \quad (3)$$

Różniczkując tę równość po t w zerze otrzymujemy:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^0)q'_1(0) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^0)q'_2(0) = 0. \quad (4)$$

Ponieważ $\tilde{p}'_i(0) = q'_i(0)$, $i = 1, 2$, mamy spełniony warunek (1) dla $\tilde{p}$. Żeby otrzymać ten warunek dla p , musimy zrozumieć jak są związane p i $\tilde{p}$.

Otóż istnieje funkcja gładka $\varphi : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ taka, że $\tilde{p}(t) = p(\varphi(t))$. Żeby to zrozumieć, określmy φ jako $\varphi(t) = p^{-1}(\tilde{p}(t))$. Zauważmy, że odwzorowanie p^{-1} nie istnieje, ale można jednoznacznie określić przeciwobraz $p^{-1}(\tilde{p}(t))$ punktu $\tilde{p}(t)$ (por. dowód twierdzenia z poprzedniego wykładu). Przy tym $\varphi(0) = 0$ (oczywiste) oraz $\varphi'(0) \neq 0$ (inaczej $\tilde{p}'(0) = (0, 0)$, czyli $\tilde{p}$ nie było by dobrą parametryzacją)¹.

Teraz $\tilde{p}'(0) = p'(0)\varphi'(0)$, gdzie $\varphi'(0) \neq 0$, czyli warunek (1) jest spełniony dla p wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony dla $\tilde{p}$.

Przejdźmy do punktu 2 i załóżmy, że P i Q są styczne rzędu 2 w punkcie x^0 . Powtarzając powyższe rozumowania otrzymamy spełnienie warunku (1). Zróżniczkujmy teraz równość (3) po t w zerze dwukrotnie i skorzystajmy z równości pochodnych q i $\tilde{p}$. Otrzymamy warunek (2) dla $\tilde{p}$. Żeby mieć go dla p podstawmy do niego $\tilde{p}''(0) = p''(0)(\varphi'(0))^2 + p'(0)\varphi''(0)$ oraz $\tilde{p}'(0) = p'(0)\varphi'(0)$ do (2). Otrzymamy (kładziemy $\alpha := \varphi'(0), \beta = \varphi''(0)$): $\alpha^2(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x^0)(p'_1(0))^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0)p'_1(0)p'_2(0) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x^0)(p'_2(0))^2 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x^0)p''_1(0) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^0)p''_2(0)) + \beta(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^0)p'_1(0) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^0)p'_2(0)) = 0$. Na mocy tego, że warunek (1) jest spełniony otrzymujemy (2) dla p .

Wykazaliśmy że warunki (1,2) są konieczne do styczności P i Q do odpowiedniego rzędu. To, że są one też wystarczające nie będzie istotne i my opuszczamy tę część dowodu. $\square$

Rodzina krzywych zależna od parametru: Niech F będzie funkcją zależną od zmiennych $(x_1, x_2, \psi_1, \dots, \psi_m)$. Możemy rozważyć rodzinę krzywych $S_\psi = \{(x_1, x_2) \mid F(x_1, x_2, \psi) = 0\}$ uważając $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$ za parametr.

PRZYKŁADY: Może to być rodzina wszystkich prostych na płaszczyźnie $P_\psi = \{(x_1, x_2) \mid R(x_1, x_2, \psi) = 0\}$, $R(x_1, x_2, \psi) = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \psi_3$, bądź rodzina wszystkich okręgów $O_\psi = \{(x_1, x_2) \mid Q(x_1, x_2, \psi) = 0\}$, $Q(x_1, x_2, \psi) = (x_1 - \psi_1)^2 + (x_2 - \psi_2)^2 = \psi_3^2$.

Krzywa ściśle styczna: Teraz, mając dowolną krzywą $C \subset \mathbb{R}^2$ oraz rodzinę krzywych S_ψ , możemy zapytać: czy można znaleźć takie wartości parametrów $\psi^0 = (\psi_1^0, \dots, \psi_m^0)$ by krzywe C i S_{ψ^0} miały najwyższy rząd styczności w pewnym punkcie $x^0 \in C$ spośród wszystkich krzywych rodziny. Jeśli tak, krzywą S_{ψ^0} nazywamy *krzywą ściśle styczną* do C w x^0 . Do szukania takiej krzywej użyjemy powyższego twierdzenia.

Prosta ściśle styczna: Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie krzywą gładkąadaną przez „dobrą” parametryzację $p : \mathbb{R} \subset U \rightarrow \mathbb{R}^2$ oraz niech $x^0 = (p_1(0), p_2(0))$ („dobra” oznacza mająca nieznikającą pochodną). Prosta ściśle styczna do C w punkcie x^0 będzie określona przez warunki:

$$R(x_1^0, x_2^0, \psi^0) = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x_1}(x^0, \psi^0)p'_1(0) + \frac{\partial R}{\partial x_2}(x^0, \psi^0)p'_2(0) = 0,$$

¹Ćwiczenie: Znajdź funkcję φ dla parametryzacji okręgu $p(t) = (\cos t, \sin t)$, $\tilde{p}(t) = ((1 - t^2)/(1 + t^2), 2t/(1 + t^2))$.

czyli

$$\psi_1^0 p_1(0) + \psi_2^0 p_2(0) + \psi_3^0 = 0, \psi_1^0 p_1'(0) + \psi_2^0 p_2'(0) = 0.$$

Równania te określają wektor ψ^0 z dokładnością do proporcjonalności. Istotnie, $p'(0) \neq 0$, z czego wynika, że macierz tego układu $\begin{bmatrix} p_1(0) & p_2(0) & 1 \\ p_1'(0) & p_2'(0) & 0 \end{bmatrix}$ ma rząd 2, czyli ma 1-wymiarowe jądro. Jasne, że prosta ściśle styczna P_{ψ^0} pokrywa się z $T_{x^0}^a C$ (*Dlaczego?*).

Wykład 6: Geometria krzywych II

Literatura dodatkowa: [Fic04]

Okrąg ściśle styczny: Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie krzywą gładką zadaną przez „dobrą” parametryzację $p : \mathbb{R} \subset U \rightarrow \mathbb{R}^2$ oraz niech $x^0 = (p_1(0), p_2(0))$. Okrąg ściśle styczny do C w punkcie x^0 będzie określony przez warunki:

$$Q(x_1^0, x_2^0, \psi^0) = 0, \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x^0, \psi^0)p'_1(0) + \frac{\partial Q}{\partial x_2}(x^0, \psi^0)p'_2(0) = 0, \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}(x^0, \psi^0)(p'_1(0))^2 +$$

$$2\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0, \psi^0)p'_1(0)p'_2(0) + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}(x^0, \psi^0)(p'_2(0))^2 + \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x^0, \psi^0)p''_1(0) + \frac{\partial Q}{\partial x_2}(x^0, \psi^0)p''_2(0) = 0,$$

czyli

$$(p_1(0) - \psi_1^0)^2 + (p_2(0) - \psi_2^0)^2 = (\psi_3^0)^2, 2(p_1(0) - \psi_1^0)p'_1(0) + 2(p_2(0) - \psi_2^0)p'_2(0) = 0, 2(p'_1(0))^2 + 2(p'_2(0))^2 +$$

$$2(p_1(0) - \psi_1^0)p''_1(0) + 2(p_2(0) - \psi_2^0)p''_2(0) = 0.$$

Zakładając, że $\begin{vmatrix} p'_1(0) & p'_2(0) \\ p''_1(0) & p''_2(0) \end{vmatrix} \neq 0$ (warunek nie spełniony np. dla prostej) jednoznacznie wyznaczamy współrzędne środka okręgu ψ_1^0, ψ_2^0 z ostatnich dwóch równań (są liniowe ze względu na ψ_1^0, ψ_2^0), a z pierwszego równania również jednoznacznie wyznaczamy ψ_3^0 , czyli promień okręgu.

Zobaczmy jak to wygląda w przypadku, gdy krzywa C jest wykresem $\Gamma_f = \{(x_1, f(x_1))\}$ pewnej funkcji dwukrotnie różniczkowalnej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o własności $f''(x_1^0) \neq 0$. Wtedy C ma naturalną parametryzację $p(t) = (x_1^0 + t, f(x_1^0 + t))$ (przy czym $f(x_1^0) = x_2^0$). Powyższe równania przekształcają się w (korzystamy z równości $p_1(0) = x_1^0, p'_1(0) = 1, p''_1(0) = 0, p_2(0) = f(x_1^0) = x_2^0, p'_2(0) = f'(x_1^0), p''_2(0) = f''(x_1^0)$)

$$(x_1^0 - \psi_1^0)^2 + (x_2^0 - \psi_2^0)^2 = (\psi_3^0)^2, 2(x_1^0 - \psi_1^0) + 2(x_2^0 - \psi_2^0)f'(x_1^0) = 0, 2 + 2(f'(x_1^0))^2 +$$

$$2(x_2^0 - \psi_2^0)f''(x_1^0) = 0.$$

Ostatnie dwa równania skracamy przez -2 i przepisujemy jako

$$\begin{bmatrix} 1 & f'(x_1^0) \\ 0 & f''(x_1^0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 + x_2^0 f'(x_1^0) \\ 1 + (f'(x_1^0))^2 + x_2^0 f''(x_1^0) \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie ma postać $\psi_2^0 = x_2^0 + \frac{1+(f'(x_1^0))^2}{f''(x_1^0)}, \psi_1^0 = x_1^0 + x_2^0 f'(x_1^0) - f'(x_1^0)(x_2^0 + \frac{1+(f'(x_1^0))^2}{f''(x_1^0)}) = x_1^0 - f'(x_1^0)\frac{1+(f'(x_1^0))^2}{f''(x_1^0)}$. Z pierwszego równania mamy $(\psi_3^0)^2 = [\frac{1+(f'(x_1^0))^2}{f''(x_1^0)}]^2 + [f'(x_1^0)\frac{1+(f'(x_1^0))^2}{f''(x_1^0)}]^2 = \frac{(1+(f'(x_1^0))^2)^3}{(f''(x_1^0))^2}$.

Pierwsza definicja krzywizny: Krzywiznę $\kappa(x^0)$ krzywej płaskiej C w punkcie $x^0 \in C$ definiujemy jako odwrotność $1/\psi_3^0$ do promienia okręgu ściśle stycznego do C w punkcie x^0 . Dla krzywej będącej wykresem Γ_f mamy wzór:

$$\kappa(x^0) = \frac{|f''(x_1^0)|}{(1 + (f'(x_1^0))^2)^{3/2}}.$$

Interpretacja geometryczna styczności rzędu $n - 1$: Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie zadaną krzywą gładką, $x^0 \in C$ oraz niech $S_\psi = \{(x_1, x_2) \mid F(x_1, x_2, \psi) = 0\}$ będzie zadaną rodziną krzywych.

Wybermy punkty $x^1, x^2, \dots, x^n \in C$. Załóżmy, że w rodzinie S_ψ istnieje jedyna krzywa zawierająca te punkty. Innymi słowy, równania

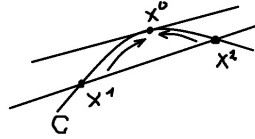
$$F(x_1^1, x_2^1, \psi) = 0, \dots, F(x_1^n, x_2^n, \psi) = 0$$

jednoznacznie określają parametr $\psi = \psi(x^1, \dots, x^n)$. W takim oznaczeniu powyższa krzywa jest $S_{\psi(x^1, \dots, x^n)}$.

Na przykład, dla $n = 2$ i rodziny prostych istnieje jedyna prosta $P(x^1, x^2)$ przechodząca przez punkty x^1, x^2 (o ile $x^1 \neq x^2$). Parametr $\psi(x^1, x^2) = (\psi_1(x^1, x^2), \psi_2(x^1, x^2), \psi_3(x^1, x^2))$ jest określony jednoznacznie z dokładnością do proporcjonalności. W przypadku $n = 3$ i rodziny okręgów istnieje dokładnie jeden okrąg $O(x^1, x^2, x^3)$ przechodzący przez x^1, x^2, x^3 (o ile one nie leżą na jednej prostej), tzn. parametr $\psi(x^1, x^2, x^3) = (\psi_1(x^1, x^2, x^3), \psi_2(x^1, x^2, x^3), \psi_3(x^1, x^2, x^3))$ jest określony jednoznacznie.

Niech teraz punkty $x^1, x^2, \dots, x^n$ dążą wzdłuż krzywej C do $x^0 \in C$ według pewnego prawa. Może się zdarzyć, że odpowiednia krzywa $S_{\psi(x^1, \dots, x^n)}$ będzie dążyła do pewnej krzywej $S_{\tilde{\psi}}$ (nazywaną *krzywą graniczną*) z tej że rodziny niezależnie od powyższego prawa. Okazuje się, że wtedy krzywa graniczna $S_{\tilde{\psi}}$ będzie miała w punkcie x^0 styczność rzędu $n - 1$ z krzywą C . Dla czego tak się staje wyjaśnimy poniżej na przykładzie rodzin P_ψ i O_ψ .

Sieczne i styczne: Prosta $P(x^1, x^2)$ przecinająca krzywą C w co najmniej dwóch punktach x^1, x^2 jest nazywana *sieczną*. W granicy, gdy $x^1, x^2 \rightarrow x^0$ otrzymujemy styczną $T_{x^0}^a C$.



Istotnie, niech krzywa C będzie zadana przez parametryzację $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, p(t) = (p_1(t), p_2(t))$, przy czym $p(t_1) = x^1, p(t_2) = x^2, p(0) = x^0$. Rozważmy funkcję

$$g_{x^1, x^2}(t) = \psi_1(x^1, x^2)p_1(t) + \psi_2(x^1, x^2)p_2(t) + \psi_3(x^1, x^2)$$

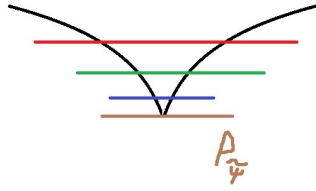
(tutaj x^1, x^2 traktujemy jako parametry). Ona jest gładką i ma własność $f(t_1) = f(t_2) = 0$. Według twierdzenia Rolle'a jej pochodna $\psi_1(x^1, x^2)p'_1(t) + \psi_2(x^1, x^2)p'_2(t)$ musi się zerować w pewnym punkcie t_0 leżącym w przedziale (t_1, t_2) .

Gdy $x^1, x^2 \rightarrow x^0$, to $t_1, t_2 \rightarrow 0$ i w konsekwencji $t_0 \rightarrow 0$. Stąd $\tilde{\psi}_1 p'_1(0) + \tilde{\psi}_2 p'_2(0) = 0$, gdzie $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ są pierwsze dwa parametry prostej granicznej $P_{\tilde{\psi}} = \{(x_1, x_2) \mid \tilde{\psi}_1 x_1 + \tilde{\psi}_2 x_2 + \tilde{\psi}_3 = 0\}$ (trzeci parametr $\tilde{\psi}_3$ wyznacza się z warunku $x^0 \in P_{\tilde{\psi}}$).

Widzimy, że wektor $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$ jest prostopadły do wektora stycznego $(p'_1(0), p'_2(0))$, czyli $P_{\tilde{\psi}} = T_{x^0}^a C$.

Uwaga: To, że x^1, x^2 „dążą wzdłuż krzywej C do $x^0 \in C$ według pewnego prawa” oznacza, że istnieją łuki sparametryzowane $p^1, p^2 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ o własnościach: 1) $p^i((-1, 1)) \subset C$; 2) $p^i(-1/2) = x^i, p^i(0) = x^0$ (tutaj $i = 1, 2$). Może się zdarzyć, że graniczna prosta nie jest określona jednoznacznie, czyli zależy od wyboru łuków p^1, p^2 .

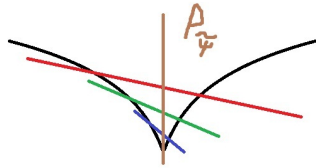
PRZYKŁAD: Rozważmy krzywą $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$, punkt $x^0 = (0, 0)$ oraz łuki $p^1(t) = (t^3, t^2), p^2(t) = (-t^3, t^2), q^1(t) = (t^6, t^4), q^2(t) = (-t^3, t^2)$. Prosta $P(p^1(t), p^2(t))$ ma równanie $x_2 = t^2$, które w granicy przy $t \rightarrow 0$ przechodzi na $x_2 = 0$ (oś „ x_1 ”).



Równanie prostej $P(x^1, x^2)$ przechodzącej przez punkty $x^1 = (x_1^1, x_2^1), x^2 = (x_1^2, x_2^2)$, gdzie $x_1^2 \neq x_1^1, x_2^2 \neq x_2^1$, to

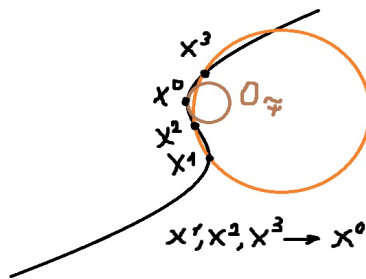
$$\frac{x_1 - x_1^1}{x_1^2 - x_1^1} = \frac{x_2 - x_2^1}{x_2^2 - x_2^1}.$$

Stąd prosta $P(q^1(t), q^2(t))$ ma równanie $\frac{x_1 - t^6}{-t^3 - t^6} = \frac{x_2 - t^4}{t^2 - t^4}$ lub inaczej $(x_1 - t^6)(1 - t^2) = (x_2 - t^4)(-t - t^4)$. W granicy przy $t \rightarrow 0$ to równanie przechodzi na $x_1 = 0$ (oś „ x_2 ”).



Ten przykład ilustruje ogólną cechę punktów „niegładkich”: przestrzeń styczna do krzywej (powierzchni) w takim punkcie jest źle określona.

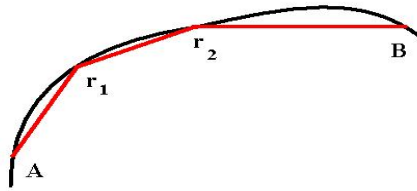
Ilustracja dla okręgu ściśle stycznego:



Wykład 7: Geometria krzywych III

Literatura dodatkowa: [Fic04, Opr02]

Długość łuku płaskiej krzywej gładkiej: Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie krzywą płaską oraz $A, B \in C$. Długość $l_{C,A,B}$ łuku krzywej pomiędzy punktami A, B definiujemy w sposób następujący. Wybieramy na C pomiędzy punktami A, B skończoną liczbę punktów $r_1, \dots, r_{n-1}$ i kładziemy $r_0 = A, r_n = B$. Sąsiednie punkty łączymy odcinkami prostych. Powstałą w ten sposób łamaną nazywamy *łamaną wpisaną w krzywą C pomiędzy punktami A, B* i oznaczamy przez $L_{A,B}$. Jej długość $\sum_{j=1}^n |r_j - r_{j-1}|$ (tutaj $|r_j - r_{j-1}|$ jest euklidesową długością wektora $r_j - r_{j-1}$) oznaczamy przez $|L_{A,B}|$.



Długość łuku krzywej $l_{C,A,B}$ określamy jako kres górny

$$l_{C,A,B} = \sup_{L_{A,B}} |L_{A,B}|$$

długości wszystkich łamanych wpisanych w C pomiędzy A, B . Krzywa C nazywa się *prostowalną* pomiędzy A i B , gdy $l_{C,A,B} < \infty$.

Niech teraz C będzie zadana jako $\text{im } p$, gdzie $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, p = (p_1(t), p_2(t))$, jest parametryzacja gładka (funkcje $p_i(t)$ są ciągle różniczkowalne) oraz niech $p(a) = A, p(b) = B$. W analizie dowodzi się (zob. [Fic04, Rozdział VII, §4]), że w takiej sytuacji C jest prostowalna pomiędzy A i B oraz

$$l_{C,A,B} = \int_a^b |p'(t)| dt,$$

gdzie $|p'(t)| = \sqrt{(p'_1(t))^2 + (p'_2(t))^2}$ jest długością wektora stycznego $\mathbf{t}p(t)$. Zauważmy, że definicja długości krzywej nie zależy od wyboru parametryzacji, więc i wartość całki z powyższego wzoru nie powinna od niej zależeć. I istotnie, jeśli $\tilde{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ inna parametryzacja krzywej C , przy czym $\tilde{p}(\tilde{a}) = A, \tilde{p}(\tilde{b}) = B$, to istnieje funkcja gładka $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o własnościach $\tilde{p}(t) = p(\varphi(t)), \varphi(\tilde{a}) = a, \varphi(\tilde{b}) = b$ (por. dowód twierdzenia z Wykładu 5). Wtedy $\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\tilde{p}'(t)| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \sqrt{(\tilde{p}'_1(t))^2 + (\tilde{p}'_2(t))^2} dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \sqrt{(p'_1(\varphi(t))\varphi'(t))^2 + (p'_2(\varphi(t))\varphi'(t))^2} dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \sqrt{(p'_1(\varphi(t)))^2 + (p'_2(\varphi(t)))^2} |\varphi'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(p'_1(\tau))^2 + (p'_2(\tau))^2} d\tau = \int_a^b |p'(\tau)| d\tau$ (skorzystaliśmy tu z twierdzenia o zamianie zmiennej pod całką).

Długość łuku przestrzennej krzywej gładkiej: W sposób podobny do powyższego można zdefiniować długość łuku krzywej $C \subset \mathbb{R}^n$. Jeśli krzywa jest zadana przez parametryzację gładką (ciągle różniczkowalną) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ taką, że $p(a) = A, p(b) = B$ to

$$l_{C,A,B} = \int_a^b |p'(t)| dt,$$

gdzie $|p'(t)| = \sqrt{(p'_1(t))^2 + \dots + (p'_n(t))^2}$ jest długością wektora stycznego $\mathbf{tp}(t)$. Jak i w płaskim przypadku wartość tej całki ta nie zależy od wyboru parametryzacji krzywej C .

Parametryzacja naturalna: Niech $C \subset \mathbb{R}^n$ będzie krzywą gładką. Mówimy, że parametryzacja krzywej $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest *naturalna* (lub *łukowa*), jeśli $l_{C,p(t_1),p(t_2)} = t_2 - t_1$ dla dowolnych $t_{1,2} \in \mathbb{R}$. Innymi słowy parametrem naturalnej parametryzacji występuje długość łuku. Parametryzacja naturalna p charakteryzuje się warunkiem $|p'(t)| \equiv 1$ (bo $l_{C,p(t_1),p(t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} |p'(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1$).

PRZYKŁAD: Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie okręgiem o promieniu r . Parametryzacja $p : t \mapsto (r \cos(t/r), r \sin(t/r))$ jest naturalna. Istotnie długość łuku odpowiadającego kątowi φ jest równa $r\varphi$ (np. długość całego okręgu jest równa $r2\pi$). Parametr t odgrywa rolę kąta, czyli długości łuku. Inaczej: $|p'(t)| = \sqrt{\sin^2(t/r) + \cos^2(t/r)} = 1$.

Twierdzenie: Dla dowolnej krzywej gładkiej $C \subset \mathbb{R}^n$ istnieje parametryzacja naturalna.

Dowód: Ustalmy parametr $t_0 \in R$ i zadajmy funkcję $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$t \mapsto \int_{t_0}^t |p'(\tau)| d\tau,$$

gdzie p jest dowolną parametryzacją krzywej C . Wtedy φ jest funkcją ciągle różniczkowalną ($\varphi'(t) = |p'(t)|$) oraz parametryzacja $\tilde{p}(s) = p(\varphi^{-1}(s))$ jest naturalna. Istotnie, $|\tilde{p}'(s)| = \frac{\sqrt{(\tilde{p}'_1(s))^2 + \dots + (\tilde{p}'_n(s))^2}}{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))|} = \frac{\sqrt{(p'_1(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1})'(s))^2 + \dots + (p'_n(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1})'(s))^2}}{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))|} = |(\varphi^{-1})'(s)| |p'(\varphi^{-1}(s))| = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} |p'(\varphi^{-1}(s))| = 1$.

Druga definicja krzywizny: Niech $C \subset \mathbb{R}^n$ będzie krzywą gładką (dwukrotnie różniczkowalną), a $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jej naturalną parametryzacją. Oznaczmy wektor styczny $\mathbf{tp}(t) = p'(t)$ przez $T(t)$. Mamy nową krzywą gładką $t \mapsto T(t)$. Krzywiznę krzywej C w punkcie $p(t)$ definiujemy jako

$$\kappa(t) = |T'(t)|,$$

czyli jako długość wektora stycznego do krzywej sparametryzowanej T .

PRZYKŁAD: Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie okręgiem o promieniu r i niech $p : t \mapsto (r \cos(t/r), r \sin(t/r))$. Wtedy $T(t) = p'(t) = (-\sin(t/r), \cos(t/r))$, $T'(t) = (-\cos(t/r)/r, -\sin(t/r)/r)$, $|T'(t)| = \sqrt{\cos^2(t/r)/r^2 + \sin^2(t/r)/r^2} = 1/r$.

Sens geometryczny krzywizny: Ponieważ $|T(t)| \equiv 1$ (innymi słowy krzywa T leży na sferze jednostkowej w $\mathbb{R}^n$), wartość bezwzględna pochodnej T' opisuje zmiany kierunku wektora stycznego $\mathbf{tp}$, czyli „zakrzywienie” krzywej C . Na przykład, gdy $\kappa(t) \equiv 0$ ten kierunek się nie zmienia i krzywa C jest prostą (*Ćwiczenie:* udowodnij ten fakt).

Sens fizyczny krzywizny: Krzywizna jest wartością bezwzględną przyspieszenia cząstki poruszającej się ze stałą prędkością 1 wzdłuż krzywej C . Na przykład, gdy C jest prostą, cząstka poruszająca się ze stałą prędkością przyspieszenia nie ma.

Prostopadłość wektorów T i T' :

LEMAT Niech $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą dwiema gładkimi krzywymi sparametryzowanymi. Wtedy

$$\frac{d}{dt}(p(t) \cdot q(t)) = p'(t) \cdot q(t) + p(t) \cdot q'(t).$$

Dowód: Korzystamy z prawa Leibniza różniczkując każdy z członów sumy $p(t) \cdot q(t) = p_1(t)q_1(t) + \dots + p_n(t)q_n(t)$.

WNIOSEK: $T(t) \cdot T'(t) \equiv 0$.

Dowód: Mamy $1 = T(t) \cdot T(t)$. Wobec tego powyższy Lemat nam daje $0 = T'(t) \cdot T(t) + T(t) \cdot T'(t) = 2T'(t) \cdot T(t)$.

PRZYKŁAD: Dla okręgu o promieniu r mamy $(-\sin(t/r), \cos(t/r)) \cdot (-\cos(t/r)/r, -\sin(t/r)/r) = 0$.

Wykład 8: Geometria krzywych IV

Literatura dodatkowa: [Opr02]

Iloczyn wektorowy w $\mathbb{R}^3$ (przypomnienie z algebry): Niech $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. Z definicji

$$v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1).$$

Wzór ten można też skrótowo zapisać jako

$$v \times w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

gdzie $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ są wektorami bazy standardowej w $\mathbb{R}^3$ (zauważmy, że powyższy wyznacznik jest symboliczny, gdyż wyrazami jego pierwszego wiersza są wektory, a pozostałymi wyrazami są liczby).

LEMAT (*Własności iloczynu wektorowego*)

1. $(v \times w) \cdot v = 0 = (v \times w) \cdot w$, czyli wektor $v \times w$ jest prostopadły do wektorów v i w .
2. $|v \times w| = |v||w|\sin\theta$, tutaj θ jest kątem pomiędzy wektorami v i w (innymi słowy: długość wektora $v \times w$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez wektory v, w).

Wektory normalny i binormalny krzywej $C \subset \mathbb{R}^3$: Niech $t \mapsto p(t), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, będzie parametryzacją naturalną krzywej C . Wektor *normalny* do krzywej C w punkcie $p(t)$ definiujemy jako

$$N(t) := \frac{1}{\kappa(t)} T'(t),$$

a *binormalny* jako

$$B(t) := T(t) \times N(t).$$

Przypomnijmy, że w Wykładzie 7 zdefiniowaliśmy krzywą sparametryzowaną $t \mapsto T(t), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, jako krzywą wektorów stycznych $p'(t)$ do parametryzacji naturalnej, a krzywiznę $\kappa(t)$ jako długość $|T'(t)|$ wektora $T'(t)$. Wektory T i N mają więc długość 1. Poniższy lemat pokazuje w szczególności, że również i wektor B jest jednostkowy.

LEMAT (*Własności wektorów T, N, B*)

1. $|B(t)| \equiv 1$;
2. Wektory $T(t), N(t), B(t)$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ (czyli wszystkie wektory są parami ortogonalne i mają długość 1).
3. $B'(t) = -\tau(t)N(t)$ dla pewnej funkcji $\tau(t)$.

Dowód: Ad. 1. Wektory T i T' są prostopadłe, jak pokazaliśmy na poprzednim wykładzie. Dlatego $\sin \theta = 1$ i wzór z punktu 2 powyższego lematu daje wynik.

Ad. 2. Istotnie, ortogonalność T i $T' = \kappa N$ pokazaliśmy na poprzednim wykładzie, a ortogonalność B do T i N wynika z własności iloczynu wektorowego. To, że wszystkie wektory z tej trójki mają długość 1 wynika z definicji i z punktu 1.

Ad. 3. Wektory $T(t), N(t), B(t)$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Istnieją więc funkcje $a(t), b(t), c(t)$ takie, że $B'(t) = a(t)T(t) + b(t)N(t) + c(t)B(t)$. Ponadto, baza $T(t), N(t), B(t)$ jest ortonormalna względem iloczynu skalarnego. Mamy więc: $T(t) \cdot B'(t) = T(t) \cdot (a(t)T(t) + b(t)N(t) + c(t)B(t)) = a(t)(T(t) \cdot T(t)) + b(t)(T(t) \cdot N(t)) + c(t)(T(t) \cdot B(t)) = a(t)$, analogicznie $N(t) \cdot B'(t) = b(t), B(t) \cdot B'(t) = c(t)$.

Z innej strony, równość $B \cdot B \equiv 1$ implikuje $(B(t) \cdot B(t))' = 2B'(t) \cdot B(t) \equiv 0$. Stąd $B(t) \cdot B'(t) = c(t) = 0$.

Podobnie, różniczkując równość $T(t) \cdot B(t) = 0$ otrzymujemy: $T'(t) \cdot B(t) + T(t) \cdot B'(t) = 0$, skąd $T(t) \cdot B'(t) = -T'(t) \cdot B(t) = -\kappa(t)N(t) \cdot B(t) = 0$, czyli $a(t) = 0$.

Zostało nam oznaczyć $-b(t)$ przez $\tau(t)$.

Definicja skreślenia krzywej $C \subset \mathbb{R}^3$: *Skreśleniem* lub *torsją* krzywej C w punkcie $p(t)$, gdzie p jest parametryzacją naturalną, nazywamy współczynnik $\tau(t)$ z poprzedniego lematu. Z dowodu tego lematu widzimy, że

$$\tau(t) = -N(t) \cdot B'(t).$$

PRZYKŁAD: Niech $C \subset \mathbb{R}^3$ będzie okręgiem o promieniu r zawartym w płaszczyźnie $x_3 = 0$. Jego parametryzacją naturalną będzie $p : t \mapsto (r \cos(t/r), r \sin(t/r), 0)$. Obliczyliśmy, że $T(t) = p'(t) = (-\sin(t/r), \cos(t/r), 0), T'(t) = (-\cos(t/r)/r, -\sin(t/r)/r, 0), \kappa(t) = 1/r$. Mamy dalej, że $N(t) =$

$$T'(t)/\kappa(t) = (-\cos(t/r), -\sin(t/r), 0), B(t) = T(t) \times N(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin(t/r) & \cos(t/r) & 0 \\ -\cos(t/r) & -\sin(t/r) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}.$$

Pochodna z wektora stałego $\mathbf{k}$ jest zerowa, więc $B'(t) \equiv 0$ i $\tau(s) \equiv 0$.

Wzory Freneta:

TWIERDZENIE Dla krzywej $C \subset \mathbb{R}^3$ mają miejsce następujące wzory:

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

Dowód: Pierwszy i trzeci wzory wynikają z definicji κ i τ .

Do dowodu drugiego zastosujemy metodę podobną, jak w dowodzie poprzedniego lematu. Miastem, $N'(t) = a(t)T(t) + b(t)N(t) + c(t)B(t)$ oraz $a(t) = T(t) \cdot N'(t), b(t) = N(t) \cdot N'(t), c(t) = B(t) \cdot N'(t)$. Jak i wcześniej, ponieważ $|N(t)| \equiv 1$, mamy $N(t) \cdot N'(t) \equiv 0$.

Zróżniczkujemy teraz równość $T(t) \cdot N(t) = 0$. Otrzymamy $T(t) \cdot N'(t) = -T'(t) \cdot N(t) = -\kappa|N(t)|^2 = -\kappa(t)$.

Z kolei, różniczkowanie $B(t) \cdot N(t) = 0$ daje $B(t) \cdot N'(t) = -B'(t) \cdot N(t) = \tau(t)$.

Ostatecznie, $N'(t) = a(t)T(t) + c(t)B(t) = -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t)$.

Wykład 9: Geometria krzywych V

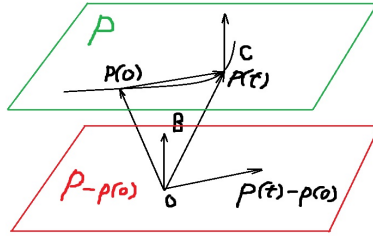
Literatura dodatkowa: [Opr02]

Sens geometryczny skręcenia:

Twierdzenie Niech $C \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą, dla której $\kappa > 0$. Skręcenie τ jest tożsamościowo równe zero wtedy i tylko wtedy, gdy C jest krzywą płaską (czyli zawartą w pewnej płaszczyźnie $P \subset \mathbb{R}^3$).

Dowód: Niech $\tau \equiv 0$. Wtedy ze wzorów Freneta wynika, że $B' \equiv 0$, więc B jest wektorem stałym. Rozważmy parametryzację naturalną $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ krzywej C oraz płaszczyznę P prostopadłą do B i zawierającą punkt $p(0)$.

Wykażemy, że krzywa C jest całkowicie zawarta w P . Istotnie, oznaczając $\psi(t) := (p(t) - p(0)) \cdot B$ mamy $\psi'(t) = ((p(t) - p(0)) \cdot B)' = (p(t) - p(0))' \cdot B = p'(t) \cdot B \equiv 0$ (skorzystaliśmy z ortogonalności T i B), funkcja $\psi(t)$ jest więc stała. Ale wiemy też, że $\psi(0) = 0$, stąd $\psi(t) \equiv 0$. Widzimy, że wektor $p(t) - p(0)$ jest zawarty w płaszczyźnie $P - p(0)$, czyli $C \subset P$.



Odwrotnie, niech P jest pewną płaszczyzną i $p(t) - p(0) \in P$ dla wszystkich t . Niech też n będzie wektorem długości jeden prostopadłym do P . Wtedy $(p(t) - p(0)) \cdot n \equiv 0$, a różniczkując tę równość (i korzystając ze stałości wektora n) otrzymujemy: $p'(t) \cdot n \equiv 0$, czyli $T(t) \cdot n \equiv 0$. Z kolei, różniczkowanie ostatniej równości daje $T'(t) \cdot n = 0$, czyli $N(t) \cdot n = 0$ (przypomnijmy, że $N(t) = (1/\kappa(t))T'(t)$). Skoro wektory $T(t)$ i $N(t)$ są prostopadłe do n , wektor $B(t) = T(t) \times N(t)$ musi być współliniowy z n . Oba wektory n i B są jednostkowe, stąd $B = n$ lub $B = -n$, czyli $B(t)$ jest stały i $B'(t) \equiv 0$. Ze wzorów Freneta wnioskujemy, że $\tau(t) \equiv 0$. $\square$

Krzywizna i skręcenie w dowolnej parametryzacji: Niech $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie dowolną parametryzacją krzywej $C \subset \mathbb{R}^3$. Przypomnijmy, że parametryzacja naturalna $\tilde{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ może być otrzymana ze wzoru

$$\tilde{p}(s) = p(\varphi^{-1}(s)),$$

gdzie $\varphi(t) = \int_{t_0}^t |p'(u)| du$ jest długością łuku krzywej C pomiędzy punktami t_0 i t . Całkę tę może być trudno wyrazić w funkcjach elementarnych lub jeśli nawet ją obliczymy, to kłopot może sprawić znalezienie φ^{-1} . Musimy więc nauczyć się obliczać krzywiznę i skręcenie wychodząc z parametryzacji p .

Lemat Niech $\nu(t) := |p'(t)|$ („prędkość” parametryzacji p). Wtedy $p'(t) = \nu(t)T(\varphi(t))$ oraz $p''(t) = \kappa(\varphi(t))\nu^2(t)N(\varphi(t)) + \nu'(t)T(\varphi(t))$.

Uwaga: Tutaj napis $T(\varphi(t)), B(\varphi(t)), \kappa(\varphi(t))$ oznacza, że odpowiednie obiekty, które były zdefiniowane w poprzednich wykładach, obliczane są w punkcie $p(t) = \tilde{p}(\varphi(t))$ krzywej C . Podobnie będziemy rozumieli oznaczenia poniższego twierdzenia.

Dowód: Oznaczając $t := \varphi^{-1}(s)$ mamy $\tilde{p}(\varphi(t)) = p(t)$ oraz $p'(t) = \frac{d}{dt}\tilde{p}(\varphi(t)) = (\tilde{p}'(\varphi(t))\varphi'(t) = T(\varphi(t))\varphi'(t) = T(\varphi(t))\nu(t)$ (równość $\varphi'(t) = \nu(t)$ wynika ze wzoru $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^t f(u)du = f(t)$).

Różniczkując powtórnie otrzymujemy $p''(t) = T'(\varphi(t))(\varphi'(t))^2 + T(\varphi(t))\varphi''(t) = \kappa(\varphi(t))N(\varphi(t))\nu^2(t) + T(\varphi(t))\nu'(t)$ (skorzystaliśmy z 1-go wzoru Freneta). $\square$

Twierdzenie 1. $B(\varphi(t)) = \frac{p'(t) \times p''(t)}{|p'(t) \times p''(t)|};$

$$2. \kappa(\varphi(t)) = \frac{|p'(t) \times p''(t)|}{|p'(t)|^3};$$

$$3. \tau(\varphi(t)) = \frac{(p'(t) \times p''(t)) \cdot p'''(t)}{|p'(t) \times p''(t)|^2}.$$

Dowód: *Ad. 1.* Korzystając z lematu i definicji B mamy $p'(t) \times p''(t) = (\nu(t)T(\varphi(t)) \times (\kappa(\varphi(t))\nu^2(t)N(\varphi(t)) + \nu'(t)T(\varphi(t)))) = \kappa(\varphi(t))\nu^3(t)T(\varphi(t)) \times N(\varphi(t)) + \nu(t)\nu'(t)T(\varphi(t)) \times T(\varphi(t)) = \kappa(\varphi(t))\nu^3(t)B(\varphi(t)) + 0$ (przypomnijmy, że $v \times w = -w \times v$, skąd $v \times v = 0$ dla dowolnego wektora v). Udowodniliśmy, że wektory $p'(t) \times p''(t)$ i $B(\varphi(t))$ są współliniowe i mają jednakowy zwrot (bo współczynnik $\kappa(\varphi(t))\nu^3(t)$ jest nieujemny). Wnioskujemy stąd, że $B(\varphi(t)) = \frac{p'(t) \times p''(t)}{|p'(t) \times p''(t)|}$.

Ad. 2. Zauważmy najpierw, że $T(\varphi(t)) = p'(t)/|p'(t)|$ (unormowany wektor styczny do C w punkcie $p(t) = \tilde{p}(\varphi(t))$, skierowany w tym samym kierunku co i $p'(t)$). Stąd $T(\varphi(t)) \times p''(t) = p'(t) \times p''(t)/|p'(t)| = p'(t) \times p''(t)/\nu(t)$. Korzystając z lematu i faktu, że $T \times T = 0$ otrzymujemy: $p'(t) \times p''(t)/\nu(t) = \kappa(\varphi(t))\nu^2(t)N(\varphi(t))$. Przypominając sobie, że $|B| \equiv 1$, mamy $|p'(t) \times p''(t)/\nu(t)| = |p'(t) \times p''(t)|/\nu(t) = \kappa(\varphi(t))\nu^2(t)$, skąd $\kappa(\varphi(t)) = |p'(t) \times p''(t)|/\nu^3(t)$.

Ad. 3. Zostawiamy tę część dowodu na samodzielne opracowanie [Opr02, s. 41].

Krzywizna krzywych płaskich: Niech $C = \text{im } p, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, p(t) = (p_1(t), p_2(t), 0)$. Zobaczmy, jakie wyrażenie na krzywiznę otrzymamy z poprzedniego twierdzenia. Mamy

$$p'(t) \times p''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p'_1(t) & p'_2(t) & 0 \\ p''_1(t) & p''_2(t) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}(p'_1(t)p_2(t)'' - p_1'(t)p_2'(t))$$

oraz $|p'(t)| = ((p'_1(t))^2 + p'_2(t))^2)^{1/2}$, skąd

$$\kappa(t) = \frac{|p'_1(t)p_2(t)'' - p_1'(t)p_2'(t)|}{((p'_1(t))^2 + p'_2(t))^2)^{3/2}}$$

(uproszciliśmy tutaj oznaczenie $\kappa(\varphi(t))$ do $\kappa(t)$). W szczególnym przypadku, gdy krzywa C jest wykresem Γ_f funkcji gładkiej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ma ona parametryzację $p(t) = (t, f(t))$, dla której powyższy wzór przekształca się w

$$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}}.$$

Wzór ten pokrywa się ze wzorem na krzywiznę, który otrzymaliśmy w ramach teorii okręgu ściśle stycznego, czyli dwie alternatywne definicje krzywizny w płaskim przypadku prowadzą do tego samego pojęcia.

W przypadku krzywych przestrzennych też można zdefiniować pojęcie okręgu ściśle stycznego (zob. [Opr02, Zadanie 1.3.22]) i pokazać, że krzywizna zdefiniowana za pomocą wzorów Freneta pokrywa się z odwrotnością do promienia tego okręgu.

PRZYKŁAD: Obliczmy krzywiznę i skręcenie krzywej Veronese $C \subset \mathbb{R}^3, C = \text{im } p, p(t) = (t, t^2, t^3)$. Mamy

$$p'(t) \times p''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = \mathbf{i}(12t^2 - 6t^2) - \mathbf{j}(6t - 0) + \mathbf{k}(2 - 0) = (6t^2, 6t, 2),$$

oraz $|p'(t)| = (1+4t^2+9t^4)^{1/2}$, czyli $\kappa(t) = (36t^4+36t^2+4)^{1/2}/(1+4t^2+9t^4)^{3/2}$. Ponadto $(p'(t) \times p''(t)) \cdot p'''(t) = (6t^2, 6t, 2) \cdot (0, 0, 6) = 12$, a $|p'(t) \times p''(t)| = (36t^4+36t^2+4)^{1/2}$, skąd $\tau(t) = 12/(36t^4+36t^2+4)$.

Wykłady 10 i 11: Geometria powierzchni I,II

Literatura dodatkowa: [Opr02]

Oznaczenia i uwagi: Od tego momentu $M \subset \mathbb{R}^2$ będzie oznaczać powierzchnie gładką 2-wymiarową w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, punkty z $\mathbb{R}^3$ będą oznaczane przez $x = (x_1, x_2, x_3)$. Jak i każda taka powierzchnia ona posiada parametryzację lokalną $r : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$, im $r \subset M$, $r(u, v) = \begin{bmatrix} r_1(u, v) \\ r_2(u, v) \\ r_3(u, v) \end{bmatrix}$ (tutaj U jest pewnym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^2$). Oznaczmy

$$r_u(u, v) := \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial r_2}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial r_3}{\partial u}(u, v) \end{bmatrix}, r_v(u, v) := \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial r_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial r_3}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}.$$

O parametryzacji r zakładamy, że jest regularna, czyli że jej macierz Jacobiego $D(r, (u, v))$ ma rząd maksymalny (równy 2) dla każdego $(u, v) \in U$ (spełnione wtedy są warunki Twierdzenia II z Wykładu 2 gwarantujące gładkość M).

Zauważmy, że wektory r_u, r_v tworzą bazę przestrzeni $T_{r(u,v)}M$. Istotnie, przestrzeń ta jest obrazem macierzy $D(r, (u, v))$, a obraz macierzy jest rozpięty przez jej kolumny, czyli przez $r_u(u, v), r_v(u, v)$. Z drugiej strony, maksymalność rzędu $D(r, (u, v))$ oznacza liniową niezależność tych wektorów.

Różniczkowanie kierunkowe: Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką, a $w \in \mathbb{R}^3$. Przypomnijmy, jak określamy pochodną $\nabla_w f(x^0)$ funkcji f w punkcie $x^0 \in \mathbb{R}^3$ w kierunku wektora w . Niech $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie dowolną krzywą sparametryzowaną o własnościach

$$\alpha(t^0) = x^0, \alpha'(t^0) = w. \quad (5)$$

Z definicji

$$\nabla_w f(x^0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t^0} f(\alpha(t)). \quad (6)$$

Okazują się, że liczba $\nabla_w f(x^0)$ nie zależy od wyboru krzywej α (czyli inna krzywa $\beta(t)$ o własnościach $\beta(t^0) = x^0, \beta'(t^0) = w$ da ten sam wynik). Istotnie, niech $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$, wtedy $f(\alpha(t)) = f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$. Reguła różniczkowania funkcji złożonych daje:

$$\nabla_w f(x^0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t^0} f(\alpha(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha(t^0))\alpha'_1(t^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\alpha(t^0))\alpha'_2(t^0) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\alpha(t^0))\alpha'_3(t^0) = \text{grad} f(x^0) \cdot w,$$

czyli wynik zależy tylko od funkcji f i wektora w . Powyższy wzór pokazuje, że operacja $\nabla_w f(x^0)$ jest liniowa ze względu na w i f oraz, że zachodzi prawo Leibniza:

$$\nabla_w (f \cdot g)(x^0) = \nabla_w f(x^0) \cdot g + f(x^0) \cdot \nabla_w g(x^0). \quad (7)$$

W przypadku, gdy $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix}$ jest funkcją wektorową (czyli wektorem zależnym od punktu lub *polem wektorowym*), powyższą definicję rozszerzamy w sposób naturalny: $\nabla_w f(x^0) =$

$\begin{bmatrix} \nabla_w f_1(x^0) \\ \nabla_w f_2(x^0) \\ \nabla_w f_3(x^0) \end{bmatrix}$. Dla funkcji wektorowych zachodzą podobne własności pochodnej kierunkowej: liniowość ze względu na w i f oraz prawo Leibniza (7) (tylko $\cdot$ jest rozumiane jako iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$).

Wektor normalny do powierzchni M w punkcie $p \in M$: Jest to wektor $U(p)$ zdefiniowany jako wektor jednostkowy (o długości jeden) ortogonalny do przestrzeni stycznej $T_p M$. Zauważmy, że wektor $U(p)$ jest zdefiniowany niejednoznacznie, ale z dokładnością do mnożenia przez -1 . Jeżeli na powierzchni M da się wybrać wektor normalny $U(p)$ w każdym punkcie $p \in M$ tak, żeby odwzorowanie $p \mapsto U(p) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ było ciągłe, powierzchnia M nazywa się *orientowalną*. Na ćwiczeniach poznamy przykład powierzchni nie będącej orientowalną. Okazuje się, że lokalnie każda powierzchnia gładka jest orientowalna.

Jeśli $M = \text{im } r$, to wektor normalny można określić jako

$$U(r(u, v)) = \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|}$$

Istotnie, iloczyn wektorowy jest ortogonalny do każdego ze swoich czynników, więc jest ortogonalny do $T_{r(u, v)} M$. Ponadto $U(r(u, v))$ jest unormowany czyli jednostkowy. Zauważmy, że zmiana kolejności czynników prowadzi do zmiany wektora normalnego na przeciwny.

Wektor normalny jest przykładem pola wektorowego określonego nie na całym $\mathbb{R}^3$ a tylko w punktach powierzchni M . Poniżej będziemy potrzebowali rozszerzenia pojęcia pochodnej kierunkowej na funkcje określone tylko w punktach powierzchni M .

Różniczkowanie kierunkowe funkcji określonych na M : Niech $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką (z definicji przez coś takiego rozumiemy funkcję, która może być przedłużona do funkcji gładkiej na pewnym otoczeniu otwartym powierzchni M w $\mathbb{R}^3$). Niech $w \in T_p M$. Znowu można zdefiniować $\nabla_w f(p)$ za pomocą wzoru (6) (wymagając, żeby $\alpha(t) \in M$ oraz żeby warunki (5) były spełnione). Zauważmy, że tym razem nie możemy wyrazić $\nabla_w f(p)$ przez gradient f ponieważ ostatni nie jest określony (do zdefiniowania gradientu potrzebujemy funkcji zadanej na zbiorze otwartym w $\mathbb{R}^3$, a M nie zawiera żadnego takiego zbioru).

Żeby jednak pokazać niezależność pochodnej kierunkowej od wyboru krzywej α możemy użyć następujących argumentów. Przedłużmy f do funkcji gładkiej $F : W \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $W \supset M$ jest pewnym zbiorem otwartym. Wtedy rachunek który przeprowadziliśmy wcześniej pokazuje, że $\nabla_w F(p) = \text{grad} F(p) \cdot w$. Okazuje się, że ostatnie wyrażenie nie zależy od sposobu przedłużenia f na W . Istotnie, jeśli $\tilde{F}$ inne przedłużenie, funkcja $F - \tilde{F}$ tożsamościowo znika na M (bo $F|_M = \tilde{F}|_M$), czyli jest jednym z „równań” na powierzchnię M . Jej gradient jest prostopadły do $T_p M$, w szczególności $\text{grad}(F - \tilde{F})(p) \cdot w = 0$ i $\text{grad} F(p) \cdot w = \text{grad} \tilde{F}(p) \cdot w$.

Możemy więc określić $\nabla_w f(p)$ wzorem $\nabla_w f(p) = \text{grad} F(p) \cdot w$.

Operator kształtu dla powierzchni M : Jest to operator $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ określony dla każdego $p \in M$ wzorem

$$S_p(w) = -(\nabla_w U)(p).$$

Inna nazwa S : *operator Weingartena*.

LEMAT (*Poprawność określenia operatora kształtu*) $S_p(w) \in T_p M$ dla każdego $w \in T_p M$.

Dowód: Korzystając z prawa Leibniza (7) zróżniczkujemy równość $1 = U \cdot U$ w kierunku w , otrzymamy $0 = 2\nabla_w U \cdot U$. Stąd wektor $\nabla_w U$ jest prostopadły do U , czyli należy do $T_p M$.

Przypomnienie z algebry: operatory symetryczne: Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$, a $(,) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ iloczynem skalarnym na V . Ostatnie oznacza, że iloczyn $(,)$ 1) jest formą dwuliniową (liniowa ze względu na każdy argument); 2) jest symetryczny $((x, y) = (y, x))$; 3) jest dodatnio określony $((x, x) > 0$ dla $x \neq 0$). Przykładem takiego iloczynu skalarnego jest często przez nas używany standardowy iloczyn skalarny $x \cdot y$ na $\mathbb{R}^3$.

Operator liniowy $S : V \rightarrow V$ nazywamy *symetrycznym*, jeśli $(Sx, y) = (x, Sy)$ dla wszystkich $x, y \in V$.

Niech $S : V \rightarrow V$ będzie dowolnym operatorem liniowym. Wtedy wzór $(x, y)_S := (Sx, y)$, $x, y \in V$, określa formę dwuliniową na V (dwuliniowość oczywista ze względu na dwuliniowość $(,)$ oraz liniowość S). Mają miejsce następujące fakty:

1. S jest symetryczny wtedy², gdy forma $(,)_S$ jest symetryczna (proste sprawdzenie).
2. Macierz operatora symetrycznego S w dowolnej bazie ortonormalnej (czyli złożonej z wektorów parami ortogonalnych o długości jeden) jest symetryczna (proste sprawdzenie).
3. Ponadto, dla symetrycznego S istnieje taka baza ortonormalna, w której macierz operatora S ma postać diagonalną (niezerowe wyrazy tylko na diagonalu) o rzeczywistych wyrazach (wynika to z tak zwanego twierdzenia spektralnego).

Ostatnia własność może być też zinterpretowana w sposób następujący. Wektor $x \in V, x \neq 0$, nazywa się *wektorem własnym* operatora S , jeśli istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że $Sx = \lambda x$. Punkt 3 oznacza, że dla operatora symetrycznego istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych.

Symetryczność operatora kształtu:

Twierdzenie Operator Weingartena $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ jest operatorem symetrycznym względem ograniczenia $(,)$ iloczynu skalarnego $x \cdot y$ z $\mathbb{R}^3$ na $T_p M$. Ponadto współczynniki formy $(,)_{S_p}$ w bazie r_u, r_v przestrzeni stycznej $T_p M$ są dane wzorami

$$(r_u, r_u)_{S_p} = r_{uu} \cdot U, (r_u, r_v)_{S_p} = r_{uv} \cdot U = (r_v, r_u)_{S_p}, (r_v, r_v)_{S_p} = r_{vv} \cdot U. \quad (8)$$

Dowód: Najpierw zauważamy, że $r_u \cdot U = 0 = r_v \cdot U$, ponieważ $r_u, r_v \in T_p M$ dla każdego $p \in M$. Teraz zróżniczkujemy pierwszą z powyższych równości kierunkowo wzdłuż r_u :

$$\nabla_{r_u}(r_u \cdot U) = \nabla_{r_u} r_u \cdot U + r_u \cdot \nabla_{r_u} U = \nabla_{r_u} 0 = 0. \quad (9)$$

Mamy $\nabla_{r_u} r_u = \nabla_{r_u} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}, \frac{\partial r_2}{\partial u}, \frac{\partial r_3}{\partial u} \right) = \left(\nabla_{r_u} \frac{\partial r_1}{\partial u}, \nabla_{r_u} \frac{\partial r_2}{\partial u}, \nabla_{r_u} \frac{\partial r_3}{\partial u} \right)$. Przypomnijmy sobie, że $\nabla_w f = \frac{\partial}{\partial t} \big|_{t=t^0} (f(\alpha(t)))$, gdzie $\alpha(t)$ jest dowolną krzywą sparametryzowaną o własności $\alpha'(t^0) = w$. Dla $w = r_u(u^0, v^0)$ możemy położyć $\alpha(u) = r(u, v^0)$ (tutaj $u^0, v^0 \in \mathbb{R}$ są takie, że $r(u^0, v^0) = p$), otrzymamy $\alpha'(u^0) = w$.

Zauważmy, że pole wektorowe r_u jest określone tylko w punktach powierzchni M . Jego wartość w punkcie $\alpha(u) = r(u, v^0)$ wynosi $\left(\frac{\partial r_1}{\partial u}(u, v^0), \frac{\partial r_2}{\partial u}(u, v^0), \frac{\partial r_3}{\partial u}(u, v^0) \right)$. Mamy $\nabla_{r_u} \frac{\partial r_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \big|_{u=u^0} \frac{\partial r_i(u, v^0)}{\partial u} =$

²Wtedy = wtedy i tylko wtedy.

$\frac{\partial^2 r_i}{\partial u^2}|_{u=u^0, v=v^0}$. Innymi słowy $\nabla_{r_u} r_u = (\frac{\partial^2 r_1}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 r_2}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 r_3}{\partial u^2})|_{u=u^0, v=v^0}$. Ostatnie wyrażenie jest dokładniejszym zapisem tego, co kryje się pod oznaczeniem r_{uu} .

Z równości (9) mamy teraz $0 = r_{uu} \cdot U + r_u \cdot \nabla_{r_u} U = r_{uu} \cdot U - r_u \cdot S_p(r_u)$ skąd $S_p(r_u) \cdot r_u = (r_u, r_u)_{S_p} = r_{uu} \cdot U$.

Pozostałe równości wyprowadzają się w podobny sposób. Istotną rolę odgrywa symetria drugich pochodnych $r_{uv} = r_{vu}$. Symetria ta powoduje również symetryczność operatora S (istotnie, równości (8) implikują symetryczność formy $(\cdot, \cdot)_{S_p}$).

Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia powierzchni M : Określimy je w punkcie $p \in M$ jako odpowiednio $K(p) = \det S_p$ i $H(p) = (1/2) \operatorname{tr} S_p$. Wiedząc, że operator S_p jest symetryczny, i że w konsekwencji jego macierz w pewnej bazie $T_p M$ ma postać $\begin{bmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{bmatrix}$, możemy zapisać wzory

$$K(p) = k_1(p)k_2(p), \quad H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Zauważmy, że $k_1(p), k_2(p)$ są wartościami własnymi operatora S_p są więc określone niezmiennie (niezależnie od wyboru bazy). Podobna uwaga dotyczy też odpowiednich ortogonalnych kierunków własnych $w_1(p), w_2(p) \in T_p M$ (wektory własne są określone z dokładnością do proporcjonalności).

Wykład 12: Geometria powierzchni III

Literatura dodatkowa: [Opr02]

Krzywizna normalna powierzchni M : Niech $w \in T_p M$ będzie jednostkowym wektorem stycznym. Krzywiznę normalną powierzchni M w kierunku w definiujemy jako liczbę

$$k(w) = (w, w)_{S_p}$$

(czyli jako wartość na w formy kwadratowej odpowiadającej formie dwuliniowej $(\cdot, \cdot)_{S_p}$).

Żeby wyjaśnić sens geometryczny krzywizny normalnej udowodnimy następujący

LEMAT Dla dowolnej krzywej gładkiej sparametryzowanej $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ takiej, że $\alpha(\mathbb{R}) \subset M$, $\alpha(t^0) = p$, $\alpha'(t^0) = w$, mamy

$$(\alpha'(t^0), \alpha'(t^0))_{S_p} = \alpha''(t^0) \cdot U(p).$$

Dowód: Podobnie do dowodu twierdzenia o symetryczności operatora kształtu mamy:

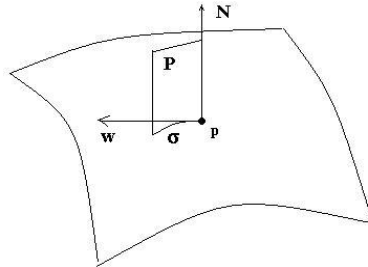
$$0 = \alpha' \cdot U \implies 0 = \nabla_{\alpha'}(\alpha' \cdot U) = \nabla_{\alpha'} \alpha' \cdot U + \alpha' \cdot \nabla_{\alpha'} U = \alpha'' \cdot U - \alpha' \cdot S(\alpha') \implies \alpha' \cdot S(\alpha') = \alpha'' \cdot U.$$

Teraz niech α będzie krzywą sparametryzowaną w sposób normalny o własnościach z powyższego lematu. Wtedy

$$k(w) = (\alpha(t^0), \alpha(t^0))_{S_p} = \alpha''(t^0) \cdot U(p) = \kappa_\alpha(t^0) N_\alpha(t^0) \cdot U(p) = \kappa_\alpha(t^0) \cos \theta,$$

gdzie κ_α jest krzywizną krzywej α a θ jest kątem pomiędzy wektorami $N_\alpha(t^0)$ i $U(p)$. Przypomnijmy, że $\alpha' = T_\alpha$, $T' = \kappa_\alpha N_\alpha$ (wskaźnik α oznacza, że odpowiednie obiekty związane są z krzywą α) oraz obydwa wektory $N_\alpha(t^0)$ i $U(p)$ są jednostkowe, więc $N_\alpha(t^0) \cdot U(p) = \cos \theta$. Okazuje się, że spośród wszystkich krzywych sparametryzowanych naturalnie i posiadających własności z powyższego lematu istnieje jedyna, dla której kąt θ jest równy 0 lub π .

LEMAT Niech P będzie płaszczyzną rozpiętą przez wektory $U(p)$ i w i niech σ będzie krzywą sparametryzowaną naturalnie, której obraz jest $P \cap M$. Wtedy $k(w) = \pm \kappa_\sigma(t^0)$, gdzie $\sigma(t^0) = p$.



Dowód: Wektory w i $\sigma'(t^0)$ są prostopadłe do $U(p)$ i zawarte w P , więc $w = \pm \sigma'(t^0)$. Wektor $N_\sigma(t^0)$ jest zawarty w P (ponieważ σ jest krzywą płaską) i jest prostopadły do $\sigma'(t^0) = T_\sigma(t^0)$, czyli $N_\sigma(t^0) = \pm U(p)$ (skąd $\cos \theta = \pm 1$).

Sens geometryczny krzywizny normalnej: Jeśli $k(w) > 0$, wektory N_σ i U pokrywają się, co oznacza, że powierzchnia w kierunku w zakrzywia się w stronę U . Jeśli, natomiast $k(w) < 0$, wektory N_σ i U są przeciwne, więc powierzchnia w kierunku w zakrzywia się przeciwnie do U .

Krzywizny i kierunki główne: Zauważmy, że funkcja $w \mapsto k(w)$ jest określona na okręgu jednostkowym $O \subset T_p M$ i jest ciągła (jako ograniczenie funkcji kwadratowej). Jak i każda funkcja ciągła na zbiorze zwartym przyjmuje ona swoje największą ($k_1 = \max_{w \in O} k(w)$) oraz najmniejszą ($k_2 = \min_{w \in O} k(w)$) wartości. Wartości te nazywamy *krzywiznami głównymi*, a odpowiednie kierunki w_1, w_2 takie, że $k(w_i) = k_i$, *wektorami głównymi*. Zauważmy, że funkcja k przyjmuje jednakowe wartości na w_i i $-w_i$, więc wektory główne są wyznaczone z dokładnością do znaku. Może też się zdarzyć, że funkcja k jest stała na O i wtedy każdy wektor z O jest wektorem głównym.

LEMAT *Wektory główne pokrywają się z wektorami własnymi operatora kształtu S_p , a krzywizny główne z odpowiednimi wartościami własnymi.*

Dowód: Niech $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in T_p M$ będzie bazą ortonormalną $T_p M$ złożoną z wektorów własnych operatora kształtu S_p , a $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ będą odpowiednimi wartościami własnymi. Wtedy macierz operatora S_p w tej bazie ma postać $\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_2 \end{bmatrix}$, a funkcja kwadratowa $k : x \mapsto (x, x)_{S_p}$ we współrzędnych odpowiadających tej że bazie ma postać $(x_1, x_2) \mapsto \tilde{k}_1 x_1^2 + \tilde{k}_2 x_2^2$. Istotnie, dla $x = x_1 \tilde{w}_1 + x_2 \tilde{w}_2$ mamy $(x, x)_{S_p} = (S_p(x_1 \tilde{w}_1 + x_2 \tilde{w}_2), x_1 \tilde{w}_1 + x_2 \tilde{w}_2) = x_1^2 \tilde{k}_1 (\tilde{w}_1, \tilde{w}_1) + x_2^2 \tilde{k}_2 (\tilde{w}_2, \tilde{w}_2) + 2x_1 x_2 \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = \tilde{k}_1 x_1^2 + \tilde{k}_2 x_2^2$ (skorzystaliśmy z ortonormalności bazy).

Ortonormalność bazy implikuje też, że okrąg jednostkowy $O \subset T_p M$ ma równanie $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Zagadnienie znalezienia ekstremów funkcji k na O jest zwykłym zagadnieniem na ekstremum związane.

SPOŚOB I ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA (METODA MNOŻNIKÓW LAGRANGE’A): Rozważmy funkcję $F(x_1, x_2) = \tilde{k}_1 x_1^2 + \tilde{k}_2 x_2^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$. Obliczamy pochodne cząstkowe i przyrównujemy do zera, otrzymujemy układ:

$$2\tilde{k}_1 x_1 + 2\lambda x_1 = 0, 2\tilde{k}_2 x_2 + 2\lambda x_2 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Założmy, że $\tilde{k}_1 \neq \tilde{k}_2$. Wtedy ten układ ma następujące rozwiązania: $x_1 = \pm 1, x_2 = 0$ lub $x_1 = 0, x_2 = \pm 1$ (λ dowolne). Punkty o współrzędnych $(1, 0), (0, 1)$ odpowiadają wektorom $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$, więc na wektorach $\pm \tilde{w}_1, \pm \tilde{w}_2$ funkcja $k|_O$ ma ekstrema i z dokładnością do kolejności i znaku wektory własne pokrywają się z wektorami głównymi. Ekstremalne wartości funkcji $k|_O$ to $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$, więc z dokładnością do kolejności wartości własne $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ pokrywają się z krzywiznami głównymi k_1, k_2 .

W przypadku, gdy $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_2$, każdy punkt na okręgu jest rozwiązaniem powyższego układu (dla $\lambda = -\tilde{k}_1 = -\tilde{k}_2$) i funkcja k jest stała na okręgu O . Wtedy każdy wektor $w \in O$ jest główny. Ale w tym przypadku operator S_p jest skalarny (krotny identyczności) i też każdy wektor $w \in O$ jest własny dla S_p o wartości własnej $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_2$.

SPOŚOB II ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA (UŻYWAJĄCY PARAMETRYZACJI): Sparametryzujemy okrąg O w standardowy sposób $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ i rozważmy złożenie f funkcji k z tą parametryzacją: $f(t) = \tilde{k}_1 \cos^2 t + \tilde{k}_2 \sin^2 t$. Szukamy ekstremów funkcji f : $f'(t) = 2(-\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) \cos t \sin t = (-\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) \sin 2t = 0$. Dla $\tilde{k}_1 \neq \tilde{k}_2$ mamy rozwiązania $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, które odpowiadają punktom $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ na okręgu. Dalej powtarzamy rozważania jak w I sposobie.

Wykład 13: Geometria powierzchni IV

Literatura dodatkowa: [Opr02]

Rozważmy kilka przykładów na obliczenie różnego typu krzywizn wprowadzonych na poprzednich wykładach.

PRZYKŁAD 0: Niech $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0\}$ będzie dowolną płaszczyzną, $p \in M$ będzie dowolnym punktem. Wtedy przecięcie płaszczyzny rozpiętej przez wektory U oraz dowolny wektor jednostkowy $w \in T_pM$ z płaszczyzną M będzie prostą. W szczególności, krzywizna normalna w punkcie p jest tożsamościowo równa zeru. Stąd równe zeru są też krzywizny główne, Gaussa i średnia.

PRZYKŁAD 1: Niech $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}$ będzie sferą o promieniu R , $p \in M$ będzie dowolnym punktem. Wtedy przecięcie płaszczyzny rozpiętej przez wektory U oraz dowolny wektor jednostkowy $w \in T_pM$ ze sferą M będzie dużym okręgiem na sferze. Stąd krzywizna normalna k jest stała na okręgu jednostkowym (i jest równa krzywiznie $1/R$ dużego okręgu, czyli okręgu otrzymanego w wyniku przecięcia sfery z płaszczyzną zawierającą środek sfery).

W szczególności, krzywizny główne k_1, k_2 pokrywają się i też są równe $1/R$. Stąd krzywizna Gaussa $K = k_1k_2$ i krzywizna średnia $H = (k_1 + k_2)/2$ są stałe na sferze i równe odpowiednio $1/R^2$ i $1/R$.

PRZYKŁAD 2: Niech $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$ będzie paraboloidą obrotową (otrzymaną w wyniku obrotu wokół osi „ z ” paraboli $C = \{(x_1, x_3) \mid x_1^2 = x_3\}$), $p = (0, 0)$. Sytuacja tutaj jest podobna do poprzedniego przykładu: przecięcie płaszczyzny rozpiętej przez wektory U oraz dowolny wektor jednostkowy $w \in T_pM$ z M będzie parabolą otrzymaną z paraboli C przez obrót. W szczególności w punkcie p wszystkie te parabole mają taką samą krzywiznę, czyli krzywizna normalna powierzchni M w punkcie p będzie stała (i równa 2 według wzoru

$$\kappa(0) = |f''(0)|/(1 + (f'(0))^2)^{3/2}, \quad (10)$$

tutaj $f(x) = x^2$).

Ponadto mamy $k_1(p) = k_2(p) = 2, K(p) = 4, H(p) = 2$.

Punkt kulisty powierzchni M : Jest to punkt $p \in M$ taki, że krzywizna normalna jest stała w tym punkcie. Dla sfery i płaszczyzny każdy punkt jest kulistym, a dla paraboloidy obrotowej takim punktem jest $(0, 0)$.

Dowód ostatniego lematu z Wykładu 11 pokazuje, że jeśli $p \in M$ nie jest punktem kulistym, to istnieją dokładnie dwa kierunki główne (na których krzywizna normalna przyjmuje minimalną i maksymalną wartość).

PRZYKŁAD 3: Niech $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 - x_2^2 = x_3\}$ będzie powierzchnią siodłową, $p = (0, 0, 0)$. Wybierzmy $U(p) = (0, 0, 1), w = w_t = (\cos t, \sin t, 0) \in O \subset T_pM = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 0\}$. Innymi słowy płaszczyzna P_t rozpięta przez wektory $U(p)$ i w_t jest otrzymana w wyniku obrotu płaszczyzny xz o kąt t wokół osi z . Żeby obliczyć krzywiznę cięcia normalnego $M \cap P_t$ zrobimy następujący trik: obrócimy nie płaszczyznę, lecz powierzchnie M i będziemy szukać przecięcia obróconej powierzchni M_t z płaszczyzną xz , czyli $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = 0\}$.

Ponieważ wspomniany obrót jest zadawany wzorami

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_3 \mapsto x_3,$$

obrócona powierzchnia ma postać $M_t = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (\cos t \, x_1 - \sin t \, x_2)^2 - (\sin t \, x_1 + \cos t \, x_2)^2 = x_3\} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \cos 2t \, x_1^2 - 2 \sin 2t \, x_1 x_2 - \cos 2t \, x_2^2 = x_3\}$. Stąd cięcie normalne $M_t \cap P$ jest dane wzorem $\cos 2t \, x_1^2 = x_3$, czyli jest parabolą lub (dla $t = k\pi/4, k = 1, 3, 5$) prostą. Jego krzywiznę w zerze obliczamy według wzoru (10) dla $f(x) = \cos 2t \, x^2$. Jest ona równa $2|\cos 2t|$.

Ostatecznie $k(w_t) = 2 \cos 2t$ (moduł w powyższym wzorze został opuszczony ponieważ cięcie normalne zakrzywia się w stronę $U(p)$ dla tych t , gdzie $\cos 2t > 0$, oraz przeciwnie do $U(p)$ dla tych t , dla których $\cos 2t < 0$).

Mamy następujące wartości krzywizn: $k_1 = 2, k_2 = -2, K = -4, H = 0$. Wektory główne to w_t dla $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

PRZYKŁAD 4: Niech $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ będzie walcem nad okręgiem jednostkowym w płaszczyźnie xy , $p = (1, 0, 0)$. Wybierzmy $U(p) = (1, 0, 0), w = w_t = (0, \cos t, \sin t) \in O \subset T_p M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0\}$. Płaszczyzna P_t rozpięta przez wektory $U(p)$ i w_t jest otrzymana w wyniku obrotu płaszczyzny xy o kąt t wokół osi x . Żeby obliczyć krzywiznę cięcia normalnego $M \cap P_t$ podobnie do poprzedniego przykładu obrócimy nie płaszczyznę, lecz powierzchnie M i będziemy szukać przecięcia obróconej powierzchni M_t z płaszczyzną xy , czyli $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 0\}$.

Wspomniany obrót jest zadawany wzorami

$$x_1 \mapsto x_1, \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

obrócona powierzchnia ma postać $M_t = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + (\cos t \, x_2 - \sin t \, x_3)^2 = 1\}$. Cięcie normalne $M_t \cap P$ jest dane wzorem $x_1^2 + (\cos t \, x_2)^2 = 1$, czyli jest elipsą lub (dla $t = \pi/2, 3\pi/2$) parą prostych równoległych. Jego krzywiznę w punkcie p obliczamy według wzoru $\kappa(0) = |\varphi_1'(0)\varphi_2''(0) - \varphi_1''(0)\varphi_2'(0)|/((\varphi_1'(0))^2 + (\varphi_2'(0))^2)^{3/2}$ dla parametryzacji elipsy $\varphi(s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s)) = (\cos s, \sin s / \cos t)$. Jest ona równa $\cos^2 t$.

Ostatecznie $k(w_t) = -\cos^2 t$ (skąd ten minus?), $k_1 = 0, k_2 = -1, K = 0, H = -1/2$. Wektory główne to w_t dla $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Wykład 14: Geometria powierzchni V

Literatura dodatkowa: [Opr02, Goe65]

Pierwsza forma podstawowa³ powierzchni M w punkcie $p \in M$: jest to ograniczenie do $T_p M$ iloczynu skalarnego $x \cdot y$ określonego na $\mathbb{R}^3$. Będziemy je oznaczać przez $g_p(\cdot, \cdot)$. Pierwsza forma podstawowa (PFP) jest formą dwuliniową symetryczną dodatnio określoną (czyli iloczynem skalarnym) zadaną na $T_p M$. Istotnie, z algebry wiemy, że ograniczenie iloczynu skalarnego do dowolnej podprzestrzeni jest iloczynem skalarnym.

Jasne że, jeśli w_1, w_2 jest jakąś bazą $T_p M$, PFP $g_p(\cdot, \cdot)$ jest jednoznacznie określona przez swoje wartości $g_p(w_1, w_1), g_p(w_1, w_2), g_p(w_2, w_2)$ (dla innych wektorów z $T_p M$ wartości PFP obliczamy z dwuliniowości). W szczególności, dla powierzchni będącej obrazem parametryzacji $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, r = r(u, v)$, PFP jest określona przez współczynniki

$$E(p) := g_p(r_u(p), r_u(p)) = r_u(p) \cdot r_u(p) = \left(\left(\frac{\partial r_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_3}{\partial u} \right)^2 \right) \Big|_p,$$

$$F(p) := g_p(r_u(p), r_v(p)) = r_u(p) \cdot r_v(p) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial u} \frac{\partial r_1}{\partial v} + \frac{\partial r_2}{\partial u} \frac{\partial r_2}{\partial v} + \frac{\partial r_3}{\partial u} \frac{\partial r_3}{\partial v} \right) \Big|_p,$$

$$G(p) := g_p(r_v(p), r_v(p)) = r_v(p) \cdot r_v(p) = \left(\left(\frac{\partial r_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_3}{\partial v} \right)^2 \right) \Big|_p.$$

Odwzorowanie izometryczne⁴: Jest to odwzorowanie gładkie⁵ $f : M \rightarrow N$ pomiędzy dwiema powierzchniami w $\mathbb{R}^3$ o tej własności, że zachowuje ono długości krzywych (czyli, jeśli $m \subset M, n \subset N$ są krzywymi gładkimi o własności $f(m) = n$, to długość łuku $l_{m,A,B}$ krzywej m pomiędzy punktami $A, B \in m$ jest równa długości łuku $l_{n,f(A),f(B)}$ krzywej n pomiędzy punktami $f(A), f(B) \in n$).

TWIERDZENIE *Niech $f : M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne:*

1. f jest izometryczne;
2. f zachowuje pierwsze formy podstawowe powierzchni M i N .

Warunek 2 wymaga dokładniejszego wyjaśnienia. Rozważmy macierz Jacobiego

$$D(F, p) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{array} \right] \Big|_p$$

odwzorowania $F : U_M \rightarrow U_N$ (zob. przypis 5) i potraktujmy ją jako odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Jego ograniczenie $f'(p)$ na podprzestrzeń $T_p M$ przyjmuje wartości w $T_{f(p)} N$ (*Ćwiczenie:* udowodnij

³Drugą podstawową formą powierzchni M w punkcie $p \in M$ nazywamy formę $(\cdot, \cdot)_{S_p}$ stowarzyszoną z operatorem kształtu S_p

⁴lub po prostu *izometria*

⁵gładkość oznacza, że istnieje rozszerzenie tego odwzorowania do odwzorowania gładkiego F pomiędzy otoczeniami otwartymi $U_M, U_N \subset \mathbb{R}^3$ zbiorów M i N

to) i może być rozumiane jako odwzorowanie liniowe $T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ (jest to właściwe spojrzenie na pochodną odwzorowania f w punkcie p , stąd oznaczenie $f'(p)$). Niech $g_p^M(\cdot, \cdot)$ oznacza PFP powierzchni M w punkcie p , a $g_{f(p)}^N(\cdot, \cdot)$ PFP powierzchni N w punkcie $f(p)$. Warunek 2 oznacza, że dla dowolnego $p \in M$ i dowolnych $x, y \in T_p M$ mamy równość $g_p^M(x, y) = g_{f(p)}^N(f'(p)x, f'(p)y)$. Inna postać tego warunku to

$$\forall p \in M \quad \forall x, y \in T_p M : x \cdot y = D(F, p)x \cdot D(F, p)y,$$

a jeszcze inna to

$$\begin{aligned} \forall p \in M \quad E(p) &= D(F, p)r_u(p) \cdot D(F, p)r_u(p), \\ F(p) &= D(F, p)r_u(p) \cdot D(F, p)r_v(p), G(p) = D(F, p)r_v(p) \cdot D(F, p)r_v(p). \end{aligned} \quad (11)$$

Dowód: ($2 \Rightarrow 1$) Przypomnijmy, że długość łuku krzywej m obliczamy według wzoru $l_{m,a,b} = \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \int_a^b g_{\varphi(t)}^M(\varphi'(t), \varphi'(t)) dt$. Tutaj $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest dowolną gładką parametryzacją krzywej m taką, że $\varphi(a) = A, \varphi(b) = B$ (również korzystamy z tego, że $m \subset M$, czyli $\varphi'(t) \in T_{\varphi(t)} M$). Mając taką parametryzację, zauważamy, że $\tilde{\varphi} := f \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest parametryzacją gładką krzywej n . Ponadto reguła różniczkowania odwzorowań złożonych implikuje równość $\tilde{\varphi}'(t) = D(F, \varphi(t))\varphi'(t)$.

$$\text{Stąd } l_{n,f(A),f(B)} = \int_a^b |\psi'(t)| dt = \int_a^b |f'(\varphi(t)) \circ \varphi'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{g_{f(\varphi(t))}^N(f'(\varphi(t)) \circ \varphi'(t), f'(\varphi(t)) \circ \varphi'(t))} dt.$$

Warunek 2 implikuje, że wyrażenie podcałkowe w ostatniej całce jest równe $\sqrt{g_{\varphi(t)}^M(\varphi'(t), \varphi'(t))}$, czyli sama całka jest równa $\int_a^b \sqrt{g_{\varphi(t)}^M(\varphi'(t), \varphi'(t))} dt = l_{m,a,b}$.

($1 \Rightarrow 2$) Niech $r : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3, r = r(u, v)$, będzie lokalną regularną parametryzacją powierzchni M , a $f : M \rightarrow N$ będzie izometrią. Rozważmy dowolną krzywą sparametryzowaną $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ o własności $\text{im } \alpha \subset M$, a przez $\tilde{\alpha}$ oznaczmy krzywą $f \circ \alpha$. Jasne jest, że $\text{im } \tilde{\alpha} \subset N$.

Naszym celem jest wykazanie równości (11). Niech u_0, v_0 będą takie, że $r(u_0, v_0) = p$. Rozważmy krzywe sparametryzowane $\alpha : t \mapsto r(u_0 + t, v_0)$ oraz $\tilde{\alpha} : t \mapsto f \circ r(u_0 + t, v_0)$. Według założenia one muszą mieć jednakową długość łuku pomiędzy odpowiednimi punktami, w szczególności całki $\int_0^\tau |\alpha'(t)| dt$ i $\int_0^\tau |\tilde{\alpha}'(t)| dt$ muszą pokrywać się dla dowolnego τ . Różniczkując je po τ otrzymujemy równość $|\alpha'(t)| = |\tilde{\alpha}'(t)|$, która implikuje równość $\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = \tilde{\alpha}'(t) \cdot \tilde{\alpha}'(t)$. Przypominamy sobie, że $\alpha'(0) = r_u(p)$ i że $\tilde{\alpha}'(0) = D(F, p)r_u(p)$, i otrzymujemy pierwszą z równości (11).

Trzecią z tych równości otrzymujemy powtarzając powyższe rozumowania dla krzywej $\beta : t \mapsto r(u_0, v_0 + t)$. Do dowodu drugiej z tych równości rozważmy krzywą $\gamma : t \mapsto r(u_0 + t, v_0 + t)$ oraz krzywą $\tilde{\gamma} : t \mapsto f \circ r(u_0 + t, v_0 + t)$. Łatwo widzieć, że $\gamma'(0) = r_u(p) + r_v(p)$. Rozważania podobne do powyższych dają nam $(r_u(p) + r_v(p)) \cdot (r_u(p) + r_v(p)) = D(F, p)(r_u(p) + r_v(p)) \cdot D(F, p)(r_u(p) + r_v(p))$. Korzystając z udowodnionych pierwszej i trzeciej równości dostajemy drugą.

PRZYKŁAD (ZWINIĘCIE PASKA W WALEC): Niech $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 0, -\pi < x_1 < \pi\}, N = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \neq -1\}$. Odwzorowanie $f = F|_M$, gdzie $F(x_1, x_2, x_3) = (\cos x_1, x_2, \sin x_1)$ jest izometrią. Istotnie, rozważmy parametryzację paska $r(u, v) = (u, v, 0), -\pi < u < \pi, v \in \mathbb{R}$, wtedy $r_u = (1, 0, 0), r_v = (0, 1, 0)$ (są stałe). Mamy

$$D(F, x) = \begin{bmatrix} -\sin x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos x_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz $D(F, x)r_u = (-\sin x_1, 0, \cos x_1)$, $D(F, x)r_v = r_v$. Widzimy, że $r_u \cdot r_u = 1 = (-\sin x_1, 0, \cos x_1) \cdot (-\sin x_1, 0, \cos x_1) = D(F, x)r_u \cdot D(F, x)r_u$, $r_u \cdot r_v = 0 = D(F, x)r_u \cdot D(F, x)r_v$, $r_v \cdot r_v = 1 = D(F, x)r_v \cdot D(F, x)r_v$.

Wykład 15: Geometria powierzchni VI

Literatura dodatkowa: [Opr02, Goe65, Tho79]

Celem niniejszego wykładu jest omówienie kilku pojęć geometrycznych, które zależą tylko od pierwszej formy podstawowej powierzchni, oraz udowodnienie „Theorema egregium” („twierdzenia znaczącego”) mówiącego, że krzywizna Gaussa jest właśnie takim pojęciem. O takich pojęciach będziemy mówili, że są one „wewnętrzne”, w odróżnieniu od pojęć zależących od „sposobu włożenia” powierzchni w $\mathbb{R}^3$. Przykładem ostatnich jest krzywizna średnia H ⁶.

Różniczkowanie kowariantne na powierzchni M : Omówiliśmy wcześniej pojęcie różniczkowania funkcji (pól) wektorowych $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ w kierunku wektora $w \in T_p M$. Zauważmy, że w przypadku, gdy pole f jest styczne do M w punkcie $p \in M$ (czyli $f(p) \in T_p M$), jego pochodna kierunkowa $\nabla_w f(p)$ wcale nie musi być taką.

Na przykład, jeśli M jest sferą jednostkową z parametryzacją $r(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$, różniczkowanie pola wektorowego $r_\varphi(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$ w kierunku r_φ jest równe $\nabla_{r_\varphi} r_\varphi = r_{\varphi\varphi} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ostatnie pole na przykład w punktach równika $\{\theta = \pi/2\}$ jest polem normali do sfery skierowanym wewnątrz, czyli nie jest styczne do sfery.

Niech $\Pi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$ oznacza operator rzutu ortogonalnego na $T_p M$. Różniczkowanie kowariantne pola wektorowego $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ stycznego do M w kierunku wektora $w \in T_p M$ definiujemy jako

$$D_w f(p) = \Pi_p(\nabla_w f(p)).$$

PRZYKŁAD: Obliczmy operator Π rzutu ortogonalnego na przestrzeń styczną do sfery. W tym celu zauważmy, że wektory $\hat{r}_\varphi = r_\varphi/|r_\varphi| = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$, $r_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}$ oraz $U = r$ tworzą

bazę ortonormalną (zależną od punktu $p = r(\varphi, \theta)$) przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Stąd dla $q \in \mathbb{R}^3$ mamy $\Pi q = (q \cdot \hat{r}_\varphi)\hat{r}_\varphi + (q \cdot r_\theta)r_\theta$.

W szczególności,

$$D_{r_\varphi} r_\varphi = \Pi r_{\varphi\varphi} = 0 \cdot \hat{r}_\varphi + (-\sin \theta \cos \theta)r_\theta = -\sin \theta \cos \theta r_\theta.$$

Analogicznie, korzystając z tego, że $r_{\varphi\theta} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $r_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \end{bmatrix}$, otrzymujemy:

$$D_{r_\varphi} r_\theta = \Pi r_{\varphi\theta} = \cos \theta \hat{r}_\varphi + 0 \cdot r_\theta = \cos \theta \hat{r}_\varphi = D_{r_\theta} r_\varphi$$

oraz

$$D_{r_\theta} r_\theta = \Pi r_{\theta\theta} = 0 \cdot \hat{r}_\varphi + 0 \cdot r_\theta = 0.$$

⁶Istotnie, gdyby była ona pojęciem „wewnętrznym”, musiałaby być zerową dla walca, który jest lokalnie izometryczny z płaszczyzną.

Zauważmy też, że $D_{r_\theta} \hat{r}_\varphi = 0$, ponieważ $\hat{r}_\varphi$ nie zależy od θ i $\hat{r}_{\theta\varphi} = 0$.

Przeniesienie równoległe na powierzchni M : Niech $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ będzie krzywą sparametryzowaną na powierzchni M , niech $\alpha(a) = A, \alpha(b) = B$ i niech $y \in T_A M, z \in T_B M$. Mówimy, że wektor z jest otrzymany z wektora y w wyniku *przeniesienia równoległego* wzdłuż krzywej α , jeśli istnieje gładkie pole wektorowe $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ o następujących własnościach:

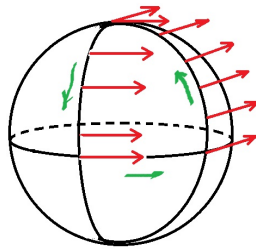
1. $f(A) = y, f(B) = z$;
2. $D_{\alpha'(t)} f(\alpha(t)) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$.

O polu f mówimy wtedy, że jest ono *równoległe wzdłuż krzywej α* (na odcinku $\alpha([a, b])$).

Uwaga: Tak naprawdę to wystarczy by pole f było określone w małym otoczeniu $U \subset M$ odcinka krzywej $\alpha([a, b])$ lub nawet wyłącznie w punktach tego odcinka.

PRZYKŁAD: Pola r_φ, r_θ są równoległe wzdłuż równika $\alpha : \varphi \mapsto \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$ ($\theta = \pi/2$), ale nie są równoległe wzdłuż innych równoleżników (dla $\theta \neq \pi/2$). Pola $r_\theta, \hat{r}_\varphi$ są równoległe wzdłuż dowolnego południka $\beta_{\varphi_0} \theta \mapsto \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi_0 \\ \sin \theta \sin \varphi_0 \\ \cos \theta \end{bmatrix}$.

W szczególności, jeśli weźmiemy wektor $(0, 1, 0) \in T_{(0,0,1)} M$, przeniesiemy go równoległe wzdłuż południka β_0 na odcinku $\beta_0([0, \pi/2])$ otrzymamy wektor $(0, 1, 0) \in T_{(1,0,0)} M$ (używamy $f = \hat{r}_\varphi$, które dookreślamy dla $\theta = 0$ wektorem $(0, 1, 0)$). Równoległe przeniesienie ostatniego wzdłuż równika α na odcinku $\alpha([0, \pi/2])$ daje wektor $(-1, 0, 0) \in T_{(0,1,0)} M$ (używamy $f = r_\varphi$). Z kolei przeniesienie ostatniego wzdłuż południka $\beta_{\pi/2}$ na odcinku $\beta_{\pi/2}([0, \pi/2])$ w kierunku „do góry” daje nam wektor $(-1, 0, 0) \in T_{(0,0,1)} M$ (używamy $f = \hat{r}_\varphi$, które tym razem dookreślamy dla $\theta = 0$ wektorem $(0, 0, -1)$). Widzimy, że przeniesienie równoległe wektora wzdłuż pewnej pętli na sferze daje nam wektor wyjściowy obrócony o 90° . Jest to skutek niezerowej krzywizny sfery.



Linie geodezyjne na powierzchni M : Są to krzywe sparametryzowane $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ o własności

$$D_{\alpha'(t)} \alpha'(t) \equiv 0.$$

Innymi słowy, są to takie krzywe α , których pole styczne jest równoległe wzdłuż α .

PRZYKŁAD: Południki β_{φ_0} są geodezyjnymi ponieważ $\beta'_{\varphi_0} = r_\theta|_{\text{im } \beta_{\varphi_0}}$ i $D_{r_\theta} r_\theta = 0$. Równik α też jest geodezyjną, ponieważ $\alpha' = r_\varphi|_{\text{im } \alpha}$ i $D_{r_\varphi} r_\varphi(p) = 0$ dla $p \in \text{im } \alpha$. Jasne jest, że każdy duży okrąg na sferze jest geodezyjną (dlaczego?).

„Wewnętrzność” różniczkowania kowariantnego: Niech $M = \text{im } r$, gdzie $r = r(u, v)$ parametryzacja regularna. Różniczkowanie kowariantne wektorów bazowych r_u, r_v daje wektory styczne do M , które mogą być przedstawione jako kombinacje liniowe tych że wektorów r_u, r_v . Wprowadźmy symbole Christoffela Γ według wzorów:

$$D_{r_u} r_u = \Gamma_{uu}^u r_u + \Gamma_{uu}^v r_v, D_{r_u} r_v = \Gamma_{uv}^u r_u + \Gamma_{uv}^v r_v, D_{r_v} r_u = \Gamma_{vu}^u r_u + \Gamma_{vu}^v r_v, D_{r_v} r_v = \Gamma_{vv}^u r_u + \Gamma_{vv}^v r_v.$$

Zauważmy, że $D_{r_v} r_u = \Pi(\nabla_{r_v} r_u) = \Pi(r_{vu}) = \Pi(r_{uv}) = \Pi(\nabla_{r_u} r_v) = D_{r_u} r_v$, mamy więc $\Gamma_{vu}^u = \Gamma_{uv}^u, \Gamma_{vu}^v = \Gamma_{uv}^v$.

Oznaczając $e_1 := r_u, e_2 := r_v$, otrzymujemy krótszy zapis powyższych równości:

$$D_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^1 e_1 + \Gamma_{ij}^2 e_2, i, j = 1, 2. \quad (12)$$

Zauważmy, że symbole Γ_{ij}^k mogą być wyrażone przez wielkości $(D_{e_i} e_j) \cdot e_k$ oraz współczynniki pierwszej formy podstawowej $E = e_1 \cdot e_1, F = e_1 \cdot e_2, G = e_2 \cdot e_2$. Istotnie, domnażając (12) skalarnie przez e_1, e_2 otrzymujemy układ równań liniowych na $\Gamma_{ij}^1, \Gamma_{ij}^2$:

$$\begin{cases} (D_{e_i} e_j) \cdot e_1 = \Gamma_{ij}^1 e_1 \cdot e_1 + \Gamma_{ij}^2 e_2 \cdot e_1 \\ (D_{e_i} e_j) \cdot e_2 = \Gamma_{ij}^1 e_1 \cdot e_2 + \Gamma_{ij}^2 e_2 \cdot e_2 \end{cases}.$$

Macierz tego układu $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ jest niezdegenerowana (jako macierz Grama niezdegenerowanej pierwszej formy podstawowej w bazie e_1, e_2), stąd układ ma jedyne rozwiązanie. Symbole $\Gamma_{ij}^1, \Gamma_{ij}^2$ można wyrazić przez $(D_{e_i} e_j) \cdot e_k$ i współczynniki E, F, G na przykład za pomocą wzorów Cramera.

Uwaga: Można pokazać, że dla każdej powierzchni istnieje (przynajmniej lokalnie) *parametryzacja ortogonalna*, czyli taka, że wektory $r_u = e_1$ i $r_v = e_2$ są prostopadłe w każdym punkcie powierzchni M . Istnienie takiej parametryzacji gwarantuje na teoria równań różniczkowych, aczkolwiek znaleźć jawny wzór na taką parametryzację może być ciężko lub niemożliwie (sytuacja to jest podobna do tej z parametryzacjami naturalnymi krzywych). Dla parametryzacji ortogonalnej powyższy układ równań liniowych rozwiązuje się szczególnie prosto (ponieważ znika $e_1 \cdot e_2$):

$$\Gamma_{ij}^1 = \frac{(D_{e_i} e_j) \cdot e_1}{E}, \Gamma_{ij}^2 = \frac{(D_{e_i} e_j) \cdot e_2}{G}.$$

TWIERDZENIE *Mają miejsce wzory*

$$(D_{e_i} e_j) \cdot e_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(e_i \cdot e_k)}{\partial y_j} + \frac{\partial(e_j \cdot e_k)}{\partial y_i} - \frac{\partial(e_i \cdot e_j)}{\partial y_k} \right), i, j, k = 1, 2,$$

tutaj $y_1 := u, y_2 := v$.

Dowód: Do dowodu twierdzenia wykorzystamy następującą własność różniczkowania kowariantnego:

$$\nabla_w (f \cdot g)(p) = D_w f(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot D_w g(p)$$

(tutaj $w \in T_p M$ a f, g są polami wektorowymi stycznymi do M). Własność ta wynika z odpowiedniej własności różniczkowania kierunkowego $\nabla_w(f \cdot g)(p) = \nabla_w f(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot \nabla_w g(p)$. Istotnie, niech $\nabla_w f(p) = f'_1 + f'_2$ będzie rozkładem na składową styczną i składową wzdłuż U . Wtedy na mocy ortogonalności U i g mamy $\nabla_w f(p) \cdot g(p) = (f'_1 + f'_2) \cdot g(p) = f'_1 \cdot g(p) = D_w f(p) \cdot g(p)$. Analogicznie rozumowania pokazują, że $f(p) \cdot \nabla_w g(p) = f(p) \cdot D_w g(p)$.

Uwzględniając teraz powyższą własność oraz równość $\nabla_{e_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$ otrzymujemy

$$\frac{\partial(e_i \cdot e_k)}{\partial y_j} = (D_{e_j} e_i) \cdot e_k + e_i \cdot (D_{e_j} e_k), \quad \frac{\partial(e_j \cdot e_k)}{\partial y_i} = (D_{e_i} e_j) \cdot e_k + e_j \cdot (D_{e_i} e_k), \quad \frac{\partial(e_i \cdot e_j)}{\partial y_k} = (D_{e_k} e_i) \cdot e_j + e_i \cdot (D_{e_k} e_j)$$

Sumując te równości z odpowiednimi znakami i biorąc pod uwagę symetryczność $D_{e_i} e_j = D_{e_j} e_i$ (zob. wyżej) otrzymujemy wynik.

WNIOSEK Niech $w \in T_p M$ i niech $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym stycznym do M . Wtedy pochodna kowariantna $D_w f(p)$ może być wyrażona przez współczynniki wektorów w, X w bazie e_1, e_2 oraz współczynniki pierwszej formy podstawowej E, F, G i ich pochodne cząstkowe.

Dowód: Niech $w = \sum_{i=1}^2 w_i e_i(p)$, $X = \sum_{i=1}^2 X_i e_i$ (tutaj $w_i \in \mathbb{R}$, a X_i są pewnymi funkcjami na M). Korzystając z własności różniczkowania kowariantnego, które są łatwym wnioskiem odpowiednich własności różniczkowania kierunkowego, mamy $D_w X(p) = (D_w(X_1 e_1 + X_2 e_2))(p) = (\nabla_w X_1) e_1(p) + X_1 D_w e_1(p) + (\nabla_w X_2) e_2(p) + X_2 D_w e_2(p) = (\nabla_w X_1) e_1(p) + (\nabla_w X_2) e_2(p) + D_{w_1 e_1 + w_2 e_2} e_1(p) + D_{w_1 e_1 + w_2 e_2} e_2(p) = (\nabla_w X_1) e_1(p) + (\nabla_w X_2) e_2(p) + w_1 (D_{e_1} e_1(p) + D_{e_1} e_2(p)) + w_2 (D_{e_2} e_1(p) + D_{e_2} e_2(p))$.

„Wewnętrzność” krzywizny Gaussa: Niech $\Psi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}U(p)$ będzie rzutem ortogonalnym przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na przestrzeń rozpiętą przez wektor normalny $U(p)$ (w szczególności każdy wektor $X \in \mathbb{R}^3$ ma jednoznaczny rozkład w postaci $X = \Pi_p X + \Psi_p X$ oraz $\Psi_p X = (X \cdot U(p))U(p)$).

Niech $Z : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie gładkim polem wektorowym stycznym do M . Wtedy

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} Z &= \nabla_{e_i} (\Pi(\nabla_{e_j} Z) + \Psi(\nabla_{e_j} Z)) = \nabla_{e_i} (D_{e_j} Z + (\nabla_{e_j} Z \cdot U)U) = \nabla_{e_i} (D_{e_j} Z) + [\nabla_{e_i} (\nabla_{e_j} Z \cdot U)]U + \\ &+ (\nabla_{e_j} Z \cdot U) \nabla_{e_i} U = \Pi \nabla_{e_i} (D_{e_j} Z) + \Psi \nabla_{e_i} (D_{e_j} Z) + (\nabla_{e_j} Z \cdot U) \nabla_{e_i} U + c_1 U = D_{e_i} (D_{e_j} Z) + (\nabla_{e_j} Z \cdot U) \nabla_{e_i} U + \\ &+ c_2 U = D_{e_i} (D_{e_j} Z) - (Z \cdot \nabla_{e_j} U) \nabla_{e_i} U + c_2 U. \end{aligned}$$

Tutaj skorzystaliśmy z definicji D , własności pochodnej kowariantnej oraz równości $0 = \nabla_{e_j} (Z \cdot U) = \nabla_{e_j} Z \cdot U + Z \cdot \nabla_{e_j} U$ wynikającej z ortogonalności Z i U (c_1, c_2 są pewnymi funkcjami na M postać których nie jest istotna dla podalszych rozważań). Otrzymaną równość można przepisać (przypominając sobie definicje operatora kształtu $Sw = -\nabla_w U$) w następujący sposób

$$\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} Z = D_{e_i} (D_{e_j} Z) - (Z \cdot Se_j) Se_i + c_2 U.$$

Stąd mamy też $\Pi \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} Z = D_{e_i} (D_{e_j} Z) - (Z \cdot Se_j) Se_i$ oraz $\Pi \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} Z = D_{e_j} (D_{e_i} Z) - (Z \cdot Se_i) Se_j$. Korzystając z symetrii drugich pochodnych mieszanych $\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} Z = \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} Z$ otrzymujemy

$$D_{e_i} (D_{e_j} Z) - D_{e_j} (D_{e_i} Z) = (Z \cdot Se_j) Se_i - (Z \cdot Se_i) Se_j \quad (13)$$

Niech teraz r będzie parametryzacją ortogonalną (zob. Uwagę powyżej) i niech $Se_1 = Ae_1 + Be_2$, $Se_2 = Ce_1 + De_2$ dla pewnych funkcji A, B, C, D na powierzchni M , czyli macierz operatora S

w bazie e_1, e_2 ma postać $[S] = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$. My wiemy, że krzywizna Gaussa K jest wyznacznikiem operatora kształtu S . W szczególności, $K = AD - BC$. Z innej strony, $A = e_1 \cdot Se_1 / (e_1 \cdot e_1)$, $B = e_2 \cdot Se_1 / (e_2 \cdot e_2)$, $C = e_1 \cdot Se_2 / (e_1 \cdot e_1)$, $D = e_2 \cdot Se_2 / (e_2 \cdot e_2)$, czyli

$$K = \frac{(e_1 \cdot Se_1)(e_2 \cdot Se_2) - (e_2 \cdot Se_1)(e_1 \cdot Se_2)}{EG}.$$

Kładąc $Z = e_1$ we wzorze (13) mamy $D_{e_2}(D_{e_1}e_1) - D_{e_1}(D_{e_2}e_1) = (e_1 \cdot Se_1)Se_2 - (e_1 \cdot Se_2)Se_1$. Domnażając ostatnią równość skalarnie przez e_2 i dzieląc przez EG otrzymujemy

$$K = \frac{(D_{e_2}(D_{e_1}e_1) - D_{e_1}(D_{e_2}e_1)) \cdot e_2}{EG}.$$

Ze względu na „wewnętrzność” różniczkowania kowariantnego wykazaliśmy „wewnętrzność” krzywizny Gaussa.

Uwaga: Skoro krzywizna Gaussa zależy tylko od współczynników pierwszej formy podstawowej ona zachowuje się przy izometriach⁷. Mianowicie, jeśli $F : M \rightarrow N$ jest izometrią pomiędzy powierzchniami $M, N \subset \mathbb{R}^3$, ma miejsce wzór $K_M(p) = K_N(F(p))$ dla dowolnego $p \in M$ (tutaj K_M, K_N są krzywiznami Gaussa powierzchni M, N odpowiednio).

Literatura

- [Fic04] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 1*, PWN, 2004.
- [Goe65] A. Goetz, *Geometria różniczkowa*, PWN, 1965.
- [Opr02] John Oprea, *Geometria różniczkowa i jej zastosowania*, PWN, 2002.
- [Tho79] John A. Thorpe, *Elementary topics in differential geometry*, Springer, 1979.

⁷Ścisły dowód tego wymaga dodatkowych rozważań i go opuszczamy (natomiast na ćwiczeniach zobaczymy jak to działa na przykładach).